

ACTIVIDADES DE INICIACIÓN A LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA¹

Juan D. Godino. Universidad de Granada

Teresa Neto. Universidad de Aveiro

Se presentan algunas actividades prácticas propuestas en un curso de innovación docente e iniciación a la investigación educativa en el marco de un máster de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Se incluyen, entre otros ejemplos, el análisis de un texto breve en el que se describe una clase ideal de matemáticas y el análisis de una sesión de clase video-grabada sobre semejanza de triángulos. Estos ejemplos se introducen con el fin de reflexionar sobre algunos principios didáctico-matemáticos básicos, los cuales permiten introducir criterios de idoneidad didáctica en el estudio de las matemáticas y motivar la búsqueda de fuentes bibliográficas en la base de datos MathEduc.

Palabras claves: educación secundaria, matemáticas, profesores, investigación, casos prácticos, idoneidad didáctica

Introductory research activities in mathematics education

This paper presents some practical activities carried out in a teaching innovation and introduction to educational research course, which is part of a Master's degree directed to secondary mathematics teachers' initial education. Among other examples we include the analysis of a short text describing an ideal mathematics classroom and the analysis of a video-recorded lesson on similarity of triangles. These activities serve to reflect on some basic mathematical didactic principles, to introduce educational suitability criteria in the study of mathematics and to motivate the review of literature in the MathEduc database.

Keywords: secondary education, mathematics, teachers, research, practical cases, didactical suitability

Introducción

En el diseño del Máster de formación de profesorado de secundaria y bachillerato se incluye el curso “Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas” en el cual se debe contemplar el desarrollo de la competencia específica, “Conocer y aplicar metodologías y

¹ UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, 63, 69-76.

técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación”. También se debe contemplar el desarrollo de la competencia general, “Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada”. En este trabajo presentamos algunas actividades prácticas orientadas al logro de tales competencias que hemos utilizado en la impartición de dicho curso. Mediante estas actividades se motivan y explican criterios de idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que están basados en un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2011; 2012).

Características de una clase ideal de matemáticas

En la primera actividad práctica se pide realizar un análisis de contenido de un texto breve, “Una visión de las matemáticas escolares” (NCTM, 2000, p.3), el cual permite fijar la atención y promover la reflexión sobre las características ideales de una clase de matemáticas. Tras la lectura individual del texto, se propone a los estudiantes trabajar en parejas para elaborar una reflexión conjunta, que finalmente es presentada y discutida por el grupo de clase. Esta actividad sirve al formador para motivar la reflexión sobre algunos principios básicos a tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre los cuales existe un cierto grado de consenso en la comunidad de educadores matemáticos. En particular permite discutir las ideas previas que tienen los profesores en formación sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y favorecer su evolución. El texto seleccionado se indica en el CUADRO 1, y las consignas en el CUADRO 2.

CUADRO 1: Texto a analizar

“Imagine una clase, una escuela, o un distrito escolar donde todos los estudiantes tienen acceso a una instrucción matemática atractiva y de alta calidad. Se proponen unas expectativas ambiciosas para todos, con adaptación para aquellos que lo necesitan. Los profesores están bien formados, tienen recursos adecuados que apoyan su trabajo y están estimulados en su desarrollo profesional. El currículo es matemáticamente rico y ofrece oportunidades a los estudiantes de aprender conceptos y procedimientos matemáticos con comprensión. La tecnología es un componente esencial del entorno. Los estudiantes, de manera confiada, se comprometen con tareas matemáticas complejas elegidas cuidadosamente por los profesores. Se apoyan en conocimientos de una amplia variedad de contenidos matemáticos, a veces enfocando el mismo problema desde diferentes perspectivas matemáticas o representando las matemáticas de maneras diferentes hasta que encuentran métodos que les permiten progresar. Los profesores ayudan a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas sobre la base de la evidencia y usan una variedad de razonamientos y técnicas de prueba para confirmar o rechazar las

conjeturas. Los estudiantes son resolutores flexibles de problemas y tienen recursos variados. Solos o en grupos y con acceso a la tecnología, los estudiantes trabajan de manera productiva y reflexiva, con la guía experimentada de sus profesores. Los estudiantes son capaces de comunicar sus ideas y resultados oralmente o por escrito de manera efectiva. Valoran las matemáticas y se comprometen activamente en su aprendizaje.” (NCTM 2000, Una Visión de las Matemáticas Escolares)

CUADRO 2: Consignas que orientan el análisis y discusión

- 1) Lee el texto con atención. Subraya los puntos que consideres especialmente atractivos en la descripción.
- 2) Identifica los aspectos que, según este texto, caracterizan una enseñanza de las matemáticas de alta calidad, clasificándolos en las siguientes facetas:
 contenido matemático; aprendizaje; afectividad; modos de interacción en el aula; recursos tecnológicos; relación con el entorno
- 3) ¿Cuáles son las características de las matemáticas que se consideran valiosas? ¿Por qué se consideran valiosas? ¿Qué otras maneras de entender las matemáticas pueden existir?
- 4) ¿Cuáles son las tareas, responsabilidades y funciones que se describen del profesor? ¿Y de los alumnos? ¿Por qué se consideran valiosas? ¿Qué otras maneras de entender las relaciones profesor-alumnos pueden existir?
- 5) ¿Qué factores externos a la clase se mencionan como condicionantes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?
- 6) El profesor que gestiona esta clase, y la comunidad educativa de la que forma parte, aplican *conocimientos* sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. ¿Qué disciplinas se ocupan de aportar dichos conocimientos?

Análisis didáctico de una clase video-grabada

El reconocimiento de la complejidad del trabajo del profesor requiere centrar la atención en la observación y análisis de procesos de estudio matemático efectivamente implementados. Ante el desfase usual existente entre la impartición de este tipo de cursos y la actuación en los centros de enseñanza en la fase de prácticas, proponemos a los estudiantes el visionado de alguna clase grabada para su posterior análisis y discusión. En Internet es posible encontrar una variedad de clases de matemáticas grabadas que se pueden usar para plantear consignas de reflexión como las incluidas en el Cuadro 3. En nuestro curso hemos usado una clase sobre el cálculo de alturas inaccesibles usando la semejanza de triángulos, que está disponible en la siguiente dirección web: http://www.youtube.com/watch?v=60s_0Ya2-d8&noredirect=1

Después de visionado el vídeo, y trabajando en equipos, se pide elaborar un informe respondiendo a las cuestiones del Cuadro 3:

Cuadro 3. Análisis de una clase video-grabada

<p>1) <i>Descripción:</i></p> <ul style="list-style-type: none">a) ¿Qué contenido matemático se estudia?b) ¿Cuál es el contexto y nivel educativo en que tiene lugar la clase?c) ¿Qué hace el profesor?d) ¿Qué hace el alumno?e) ¿Qué recursos se utilizan?f) ¿Qué conocimientos previos deben tener los alumnos para poder abordar la tarea?g) ¿Qué dificultades/conflictos de aprendizaje se manifiestan? <p>2) <i>Explicación:</i></p> <ul style="list-style-type: none">a) ¿Por qué se estudia ese contenido?b) ¿Por qué actúa el docente de la manera en que lo hace?c) ¿Por qué actúa los alumnos de la manera en que lo hacen?d) ¿Cuáles pueden ser las razones por las cuales se originan las dificultades/conflictos identificados? <p>3) <i>Valoración:</i></p> <ul style="list-style-type: none">a) ¿Qué interés tiene este contenido para la formación del alumno? ¿Con qué otros contenidos matemáticos se relaciona?b) ¿Qué cambios se deberían introducir en el contenido para incrementar la “calidad” del proceso?c) ¿Aprenden los alumnos lo que se pretende?d) ¿Qué cambios se podrían introducir en los modos de interacción y gestión de la clase para mejorar los aprendizajes y la motivación de los estudiantes?e) ¿Qué cambios se podrían introducir en los recursos usados que podrían mejorar la enseñanza y el aprendizaje? <p><i>Justificar las respuestas</i></p> <p>4) <i>Recogida de información:</i></p> <ul style="list-style-type: none">a) ¿Qué información adicional sería necesario tener para que el análisis realizado fuera más preciso y fundamentado?b) ¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos debería tener en cuenta el profesor para la planificación y la gestión de la clase?

Criterios de idoneidad didáctica

Mediante la realización de las actividades anteriores ponemos al estudiante ante el problema de sistematizar los criterios necesarios para el logro de una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de alta calidad, lo que en el marco del modelo teórico “enfoque ontosemiótico” (Godino, 2012; Font, Planas, Godino, 2010) se denomina idoneidad didáctica. En Font y Godino (2010) tales criterios de idoneidad se sintetizan de la siguiente manera:

Idoneidad epistémica, requiere que las matemáticas enseñadas sean unas “buenas matemáticas”. Se puede aumentar el grado de idoneidad presentando a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.). Se debe procurar el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; de modo que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen. Hay que asegurar que se presentan los enunciados y procedimientos básicos del tema, adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/ implementados. Se puede aumentar su grado asegurándonos, por una parte, que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y, por otra parte, que los contenidos que se pretenden enseñar se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable). Esto implica incluir actividades de ampliación y de refuerzo, realizando una evaluación formativa durante el proceso de enseñanza-aprendizaje que nos asegure que los alumnos se han apropiado de los contenidos enseñados.

Idoneidad interaccional, grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. Se puede aumentar su grado asegurándonos que el profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, haciendo un uso correcto de la pizarra, poniendo suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.). Se ha de procurar reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos; utilizando diversos recursos retóricos y argumentativos para captar, implicar, etc. a los alumnos. Hay que facilitar la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión; favoreciendo el diálogo y comunicación entre los estudiantes; contemplando momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio.

Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Se puede aumentar su grado usando materiales manipulativos e informáticos; tratando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones; invirtiendo el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema e invirtiendo el tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Se puede aumentar su grado seleccionando tareas de interés para los alumnos, mostrando la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional; promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.; favoreciendo la argumentación en situaciones de igualdad de manera que el argumento se valore en sí mismo y no por quién lo dice; promoviendo la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, etc.

Idoneidad ecológica, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc. Se puede aumentar su grado asegurando que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes; procurando que los contenidos que se enseñan se relacionan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas, etc.

Búsqueda de fuentes documentales en educación matemática

La aplicación de los criterios de idoneidad requiere la búsqueda sistemática de información sobre los distintos aspectos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta búsqueda sistemática de información motiva el diseño e implementación de una actividad práctica focalizada en el uso de una base de datos comprensiva de la bibliografía disponible sobre educación matemática, como es la base de datos *MathEduc*, complementada con la búsqueda de documentos en la web (particularmente con Google Académico).

La educación matemática es un campo de investigación en el que existe una gran cantidad de resultados reflejados en multitud de publicaciones: manuales de investigación (“handbooks”), artículos de revistas, actas de congresos, recursos para la enseñanza, etc., los cuales son recopilados en bases de datos. Una de las bases de datos más completas es *MathEduc* (<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>), por lo que conocer y practicar su consulta se considera importante para los futuros profesores. El cuadro 4 incluye las consignas dadas a los estudiantes.

Cuadro 4. Búsqueda de información en *MathEduc*

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. Presentación de la base <i>MathEduc</i>. Clasificación de temas de educación matemática. Listado de revistas cuyas publicaciones se incluyen en la base. Modos de interrogar la base de datos.2. Formulación de un tema de posible interés para desarrollar en la Tesis de Fin de Máster. Palabras y frases claves del tema. Autores que se sepa han innovado o |
|---|

investigado algún aspecto del tema.

3. Clasificación del tema entre las categorías listadas en la base de datos *MathEduc*.

4. Búsqueda de referencias pertinentes al tema elegido en la base *MathEduc*.

5. Obtención de un ejemplar de al menos una publicación relevante del tema en la biblioteca de recursos electrónicos de la universidad o mediante Google Académico.

6. Elaborar un listado de referencias con las publicaciones relevantes encontradas sobre innovaciones/ investigaciones del tema elegido.

Otros casos prácticos

Otros casos prácticos que hemos experimentado en nuestro curso se centran en el análisis de unidades didácticas disponibles en Internet, en particular alguna de las ofrecidas por el *Proyecto Descartes* para los distintos niveles de secundaria y diferentes temas matemáticos. Una vez que los estudiantes están familiarizados con la noción de idoneidad didáctica tienen para ellos sentido consignas como las siguientes:

- 1) Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad del contenido matemático implementado en dicha lección. ¿Qué cambios introducirías para mejorar la calidad de los aprendizajes pretendidos?
- 2) Valorar la idoneidad del modelo de enseñanza implementado. ¿Qué cambios introducirías para mejorar dicha idoneidad?

La reflexión sistemática sobre los procesos de interacción en el aula de matemáticas se ha promovido mediante las siguientes consignas aplicadas a la transcripción de las interacciones que tienen lugar en el trabajo cooperativo de un grupo de estudiantes resolviendo una tarea sobre proporcionalidad (Font, Planas y Godino, 2010):

- 1) ¿Qué conocimientos matemáticos pone en juego cada alumno?
- 2) ¿Qué conocimientos matemáticos son inducidos por el profesor?
- 3) ¿Cómo gestiona el profesor los conflictos de aprendizaje que se presentan?
- 4) ¿Qué normas condicionan y hacen posible el desarrollo del episodio?
- 5) ¿Cómo valorarías la idoneidad didáctica del episodio?

La respuesta a estas cuestiones requiere aplicar, además de la noción de idoneidad, otros niveles de análisis de la actividad matemática y didáctica desplegada por los estudiantes y el profesor según, se describe en Font y Godino (2006), Font, Planas y Godino (2010) y Giménez, Font, Vanegas y Ferreres (2012).

Trabajo fin de máster

Las actividades descritas anteriormente las usamos como motivación y aplicación de los “criterios de idoneidad didáctica” de aspectos parciales de un proceso de enseñanza y aprendizaje matemático. Una vez que los estudiantes están familiarizados con esta herramienta es posible dar al trabajo de fin de máster (TFM) una orientación hacia la innovación fundamentada en la experiencia práctica y los resultados de la investigación, como también proponen Giménez et al. (2012).

En nuestro caso se trata de partir de la información y experiencia que los estudiantes del máster de secundaria adquieren en la fase de prácticas en los institutos, donde tienen ocasión de entrar en relación con la realidad educativa. En esta fase de su formación usualmente los estudiantes tienen ocasión de “enseñar un tema”, bajo la dirección de un tutor y siguiendo la planificación usual de las clases, con frecuencia basada en el uso y seguimiento de un libro de texto. Esta experiencia se refleja en la correspondiente memoria de prácticas.

La aplicación de los criterios de idoneidad didáctica permite proponer un esquema de trabajo de fin máster orientado hacia la reflexión sobre la experiencia vivida en la impartición de un tema matemático en las prácticas y la indagación sistemática de posibles cambios fundamentados que se podrían introducir en el diseño, implementación y evaluación de la experiencia. El cuadro 5 resume los puntos que proponemos para desarrollar el TFM con esta orientación investigativa, suponiendo que el estudiante ha tenido ocasión de impartir una lección sobre la ecuación de segundo grado en 3º de ESO.

Cuadro 5. Esquema de una TFM con orientación investigativa

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. Introducción (motivación y síntesis del trabajo)2. Descripción de una experiencia de enseñanza en 3º de ESO sobre la ecuación cuadrática.<ol style="list-style-type: none">2.1. El centro y el grupo clase2.2. Diseño de la unidad didáctica2.3. Implementación del estudio2.4. Recogida de información y análisis de resultados.3. Conocimientos didáctico-matemáticos sobre las ecuaciones cuadráticas<ol style="list-style-type: none">3.1. Marco teórico, problema y metodología. Indicadores de idoneidad didáctica3.2. Selección y síntesis de investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática:
Facetas epistémica y ecológica, cognitiva y afectiva; interaccional y mediacional.4. Valoración de la idoneidad didáctica. Propuestas de cambios en el diseño, implementación y evaluación de la experiencia<ol style="list-style-type: none">4.1. Facetas epistémica y ecológica |
|---|

4.2. Facetas cognitiva y afectiva
4.3. Facetas interaccional y mediacional
5. Síntesis y conclusiones
Referencias
Anexos

Reflexiones finales

Los casos prácticos que hemos descrito están orientados a introducir progresivamente el uso de una herramienta de apoyo para el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente. Se trata de la noción de idoneidad didáctica y el sistema de indicadores de idoneidad, los cuales sintetizan principios didáctico-matemáticos sobre los cuales hay un consenso en la comunidad de educadores matemáticos.

La aplicación de estos criterios no evita que el profesor deba dominar con profundidad los conocimientos matemáticos cuya enseñanza se pretende, lo que supone un conocimiento especializado de dicho contenido (Godino, 2009). También es necesario conocer los aspectos cognitivos y afectivos implicados en el aprendizaje de los contenidos (dificultades, errores, niveles de desarrollo, instrumentos de evaluación), así como el uso de recursos tecnológicos, modos de interacción, etc. Sobre todos estos aspectos existen resultados de múltiples investigaciones, los cuales deben ser tenidos en cuenta cuando se desea que las innovaciones estén fundamentadas. Esta es la razón por la cual se propone la actividad práctica de búsqueda de información en la base de datos especializada *MathEduc* y en Internet.

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC).

Referencias bibliográficas

FONT, V. y GODINO, J. D.(2006): “La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores”. *Educação Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.

FONT, V. y GODINO, J. D. (2010): “Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato”. En, C. COLL (Ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas*. Barcelona: Graó.

FONT, V., PLANAS, N. y GODINO, J. D. (2010): “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2), 89-105.

GIMÉNEZ, J., FONT, V., VANEGAS, Y. M. y FERRERES, S. (2012): “El papel del trabajo final de máster en la formación del profesorado de matemáticas”. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 61,76-85.

GODINO, J. D. (2009): “Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas”. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

GODINO, J. D. (2012): “Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática”. En A. ESTEPA, A. CONTRERAS, J. DEULOFEU, M. C. PENALVA, F. J. GARCÍA Y L. ORDÓÑEZ (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

GODINO, J. D. (2011): “Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil. (Disponible en, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>)

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. (Traducción al castellano, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales, 2003).

Referencias de los autores:

Juan D. Godino

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada
jgodino@ugr.es

Línea de trabajo: Fundamentos teóricos de la investigación en didáctica de la matemática; formación de profesores de matemáticas.

Teresa Neto

Centro de investigação, Didática e Tecnologia na Formação de Formadores.
Universidade de Aveiro (Portugal)
teresaneto@ua.pt

Línea de trabajo: Razonamiento geométrico; formación de profesores de matemáticas.