INSTITUCIÓN EDUCATIVA ROSARIENSE DEL NORTE

GUÍA DE APRENDIZAJE DE MATEMATICAS

1. CARACTERIZACIÓN DE LA GUÍA

Ciclo de formación: V

Área: Matemáticas

Número de horas por ciclo: 26 horas presenciales y 20 horas trabajo en casa.

Número de clases proyectadas: 13

2. OBJETIVO DEL ÁREA:

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un Cono.
- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.
- Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

3. CURRICULAR

MATEMATICAS			
Estándar a desarrollar.	**Resultado de aprendizaje**	**Duración**	**Criterios de evaluación**
Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través demétodos numéricos,geométricos y algebraicos.	Identifico características de localización de objetos Geométricos en Sistemas de representación cartesiana y otros(polares, cilíndricos y esféricos) y enparticular de las curvas y fi guras cónicas.	5 clases presenciales, con un total de00 horas y para trabajar en casa 8 horas.	• **Saber:** Evaluaciones escritas y orales, exposiciones. • **Hacer:** Desarrollode talleres,

			Desarrollo de competencias de textoguía, elaboración detrabajo escritos. • **Ser:** Participación en clase y respeto por la palabra, trabajo individual y grupal de manera responsable y eficaz.

4. **TABLA DE SABERES.**

MATEMATICAS		
Saber – saber	**Saber hacer**	**Saber ser**
- Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre Racionales e irracionales. - Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintossistemas numéricos. - Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.	- Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. - Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media. - Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.	Cumplir con mi función cuando trabajo en grupo y respeto las funciones de las demás personas.

5. PLAN DE SESION (CLASE).

FASE	DESCRIPCION DE LA ACTIVIDAD	RECURSOS ESPERADOS	RESULTADOS ESPERADOS	EVIDENCIA DE APRENDIZAJE
INICIO **Desarrollo** **Evaluación**	SABERES PREVIOS: Se menciona un problema cotidiano donde el estudiante deberápensar sobre posibles hipótesis para dar solución. ***Conceptualización:*** Se explican conceptos con el fin de fortalecer las competencias básicas y generales a través de acciones como: observar, reflexionar, dialogar, preguntar, registrar, proponer, argumentar. ***Evaluación:*** Se realizan talleres donde se evalúa Verificar que Aprendió el estudiante y que puede hacer con los que aprendió en la vida real.	Material impreso: guía con lecturade apoyo. Material digital: Lecturas de apoyo,vídeos, mapas Conceptuales, e imágenes explicativas. Marcadores, tablero, Carteleras.	- El estudiante utiliza las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. - Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. - Analiza las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. - Modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.	Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisiónespecíficos. Interpreto y comparo resultados de estudios con informaciónestadística provenientesde medios de comunicación.

6. Metodología.

La ruta de aprendizaje que se va a ejecutar con los estudiantes para que participen en el proceso comprende tres etapas: inicio, desarrollo y evaluación.

Inicio: Se comienza mencionando un problema cotidiano donde el estudiante deberá pensar sobre posibles hipótesis para dar solución con el fin de motivar e incentivar a los estudiantes.

Desarrollo: Haciendo uso del material digital o impreso, se realiza una lectura y se sintetiza las ideas principales en el tablero con ayuda de mapa conceptuales, mapas mentales o cuadros sinópticos donde los estudiantes participan en la construcción de este. Posteriormente se realiza una explicación de la temática vista con mayor profundidad atendiendo dudas que surgen en los estudiantes.

Evaluación: Finalmente se dan las indicaciones necesarias para dar inicio a la resolución de una actividad que puede ser un taller de selección múltiple, textos de compresión lectora, debates, exposiciones, creación de infografías, resolución de problemas, entre otras. Dichas actividades pueden realizarse de forma individual o grupal según la temática trabajada y serán evaluadas según los criterios establecidos en el sistema de evaluación institucional.

7. Ambientes de aprendizaje.

En el ambiente de aprendizaje se tienen en cuenta:

Espacio físico: Aula de clase de la Institución Educativa Rosariense del Norte.

Actores: Estudiantes del ciclo V, docente del área de Matemáticas.

Elementos: Recursos educativos, estrategias didácticas.

8. Evaluación.

El objetivo de la evaluación es determinar en qué medida se están cumpliendo las metas de calidad que se fijan en los estándares detectando así, las fortalezas y debilidades en el proceso educativo, para poder así reflexionar sobre el que hacer pedagógico tomando medidas adecuadas para mejorarlo.

Para evaluar a los estudiantes se toma una escala de valoración del 1 al 10, aprobando el área con una valoración de 6,5. En dicha evaluación se tienen en cuenta tres criterios; el saber, el hacer y el ser. El porcentaje para estos criterios se define según la escala de valoración establecida en el sistema de evaluación institucional. (*Ver PEI y Manual de convivencia de la Institución*).

De acuerdo con lo establecido anteriormente, en los criterios se toma en cuenta lo siguiente:

a. **Saber:** Se realizan pruebas orales y escritas siempre enfocadas a verificar los saberes y los conocimiento adquiridos. ***Valoración 30%***

b. **Hacer:** La capacidad de aplicar los conocimientos en la solución de problemas y estudio de caso de la vida real. ***Valoración. 50%.***

c. **Ser:** Caracterizar a los estudiantes según sus actitudes y acatamiento al manual de convivencia institucional. ***Valoración 20%.***

8. BIBLIOGRAFIA SUGERIDA.

Números racionales e introducción a los irracionales-Raul Nuñez Caballero

8. ANEXOS.

https://calculorsl.es.tl/PLAN-DE-ESTUDIOS-DE-UNDECIMO.htm

https://dokumen.tips/documents/matematicas-11-utilizar-las-tecnicas-de-aproximacion-en-procesos-infinitos.html

https://proyectos.javerianacali.edu.co/cursos_virtuales/pregrado/matematicas_fundamentales/NumerosReales/Cap1/#:~:text=Como%20decimal%20la%20presentaci%C3%B3n%20m%C3%A1s,peri%C3%B3dico%20o%20infinito%20no%20peri%C3%B3dico.

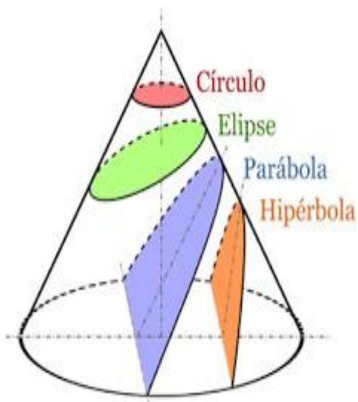
https://www.wikiwand.com/es/Representaci%C3%B3n_decimal

https://www.portaleducativo.net/primero-medio/47/densidad-y-clausura-numeros-racionales

https://iticalculodiferencial.blogspot.com/p/un-numero-real-es-un-numero-que-existe.html

Estudiante				CICLO	V
Periodo	1	GUÍA	01		
Área/asignatura	Matemáticas				
INSTITUCIÓN	Institución Educativa Rosariense del Norte				

GEOMETRÍA ANALÍTICA

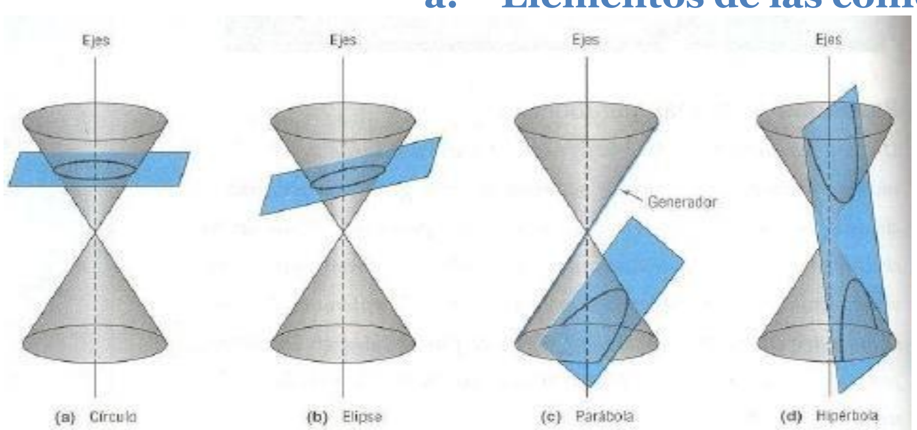


Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

• Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y fi guras cónicas

Analizo críticamente y debato con argumentos y evidencias sobre hechos ocurridos a nivel local, nacional y mundial, comprendo las consecuencias que estos pueden tener sobre mi propia vida. (Competencias cognitivas y comunicativas).

a. Elementos de las cónicas:



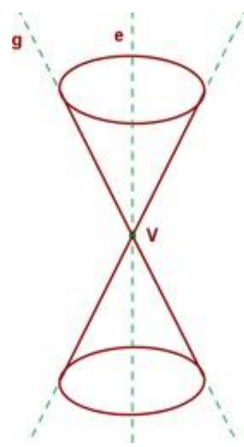
Superficie: Una superficie cónica de revolución está engendrada por la rotación de una recta alrededor de otra recta fija, llamada **eje**, a la que corta de modo oblicuo.

Generatriz: La generatriz es una cualquiera de las rectas oblicuas.

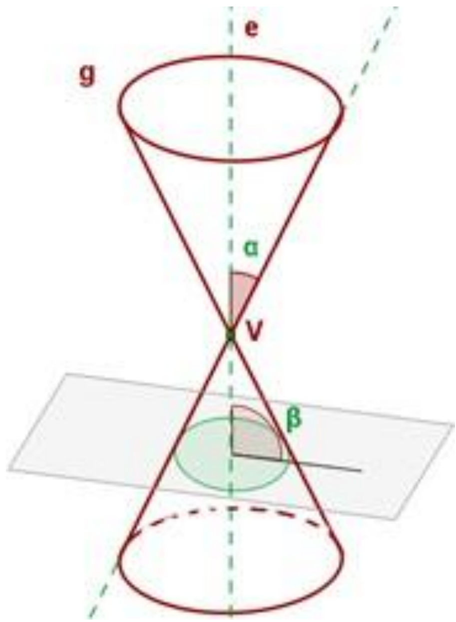
Vértice: El vértice es el punto central donde se cortan las generatrices.

Hojas: Las hojas son las dos partes en las que el vértice divide a la superficiecónica de revolución.

Sección: Se denomina sección cónica a la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice. En función de la relación existente entre el ángulo de conicidad (α) y la inclinación del plano respecto del eje delcono (β), pueden obtenerse diferentes secciones cónicas.



I. ELIPSE

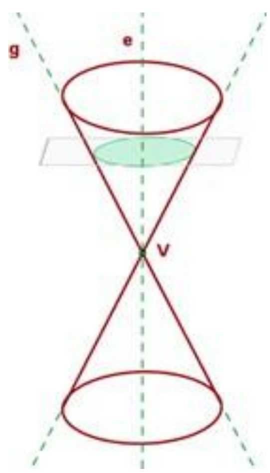


La **elipse** es la sección producida en una superficiecónica de revolución por un plano oblicuo al eje, queno sea paralelo a la generatriz y que forme con el mismo un ángulo mayor que el que forman eje y generatriz.

$\alpha < \beta < 90º$

La elipse es una curva cerrada.

I. CIRCUNFERENCIA

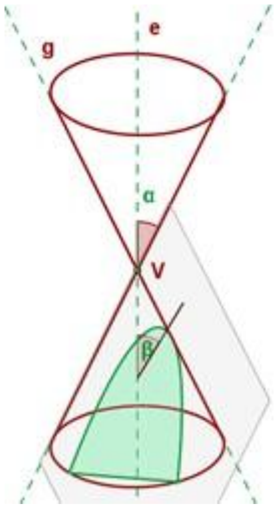


La **circunferencia** es la sección producida por un planoperpendicular al eje.

$\beta = 90º$

La circunferencia es un caso particular de elipse.

II. PARÁBOLA



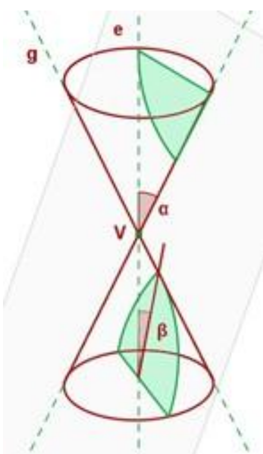
La **parábola** es la sección producida en una superficie cónica de revolución por un plano oblicuo al eje, siendo paralelo a la generatriz.

$\alpha = \beta$

La parábola es una curva abierta que se prolonga hasta elinfinito.

II. HIPÉRBOLA

III. La **hipérbola** es la sección producida en una superficie cónica de revoluciónpor un plano oblicuo al eje, formando con él un ángulo menor al que forman



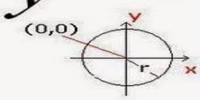
eje y generatriz, por lo que incide en las dos hojas de la superficie cónica.

$\alpha > \beta$

La hipérbola es una curva abierta que se prolonga indefinidamente y consta dedos ramas separadas.

b. ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

$$x^2 + y^2 = r^2$$



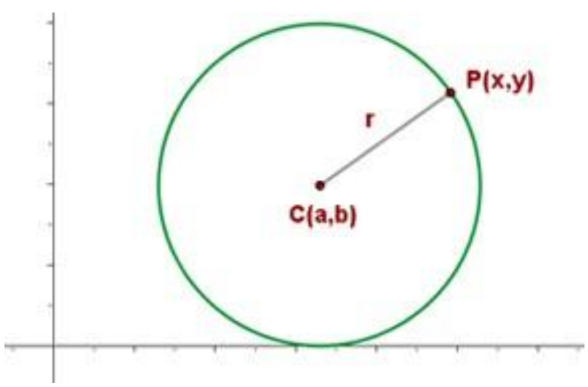
Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano queequidistan de un punto fijo llamado centro.

$$d(C, P) = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Si desarrollamos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

y realizamos estos cambios:

$$A = -2a \qquad B = -2b \qquad C = a^2 + b^2 - r^2$$

Obtenemos otra forma de escribir la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Donde el centro es:

$$C\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

y el radio cumple la relación:

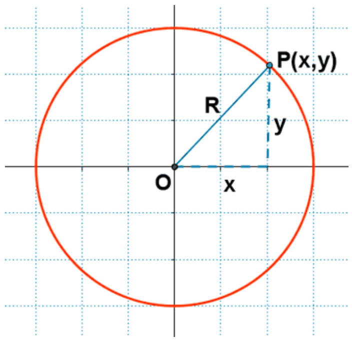
$$r^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

I. ECUACIÓN REDUCIDA DE LA CIRCUNFERENCIA

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas laecuación queda reducida a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EJERCICIOS



1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 2.

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

2. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, hallar el centro yel radio.

$-2 = -2a \qquad a = 1$

$C(1, -2)$

$4 = -2b \qquad b = -2$

$C = a^2 + b^2 - r^2 \qquad -4 = 1 + 4 - r^2 \qquad r = 3$

1. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2,0), B(2,3),C(1, 3).

Si sustituimos x e y en la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ por lascoordenadas de los puntos se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 4 + 0 + 2A + 0 + C = 0 \\ 4 + 9 + 2A + 3B + C = 0 \\ 1 + 9 + A + 3B + C = 0 \end{cases}$$

$A = -3$ $\qquad$ $B = -3$ $\qquad$ $C = 2$

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$$

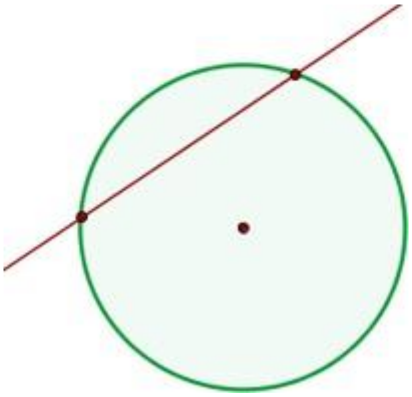
a. INTERSECCIÓN DE UNA CÓNICA Y UNA RECTA

Para hallar los puntos comunes a una cónica y una recta resolveremos elsistema formado por las ecuaciones de ambas.

En general se obtiene un ecuación de segundo grado, que tendrá dependiendo del signo del discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$ las siguientessoluciones:

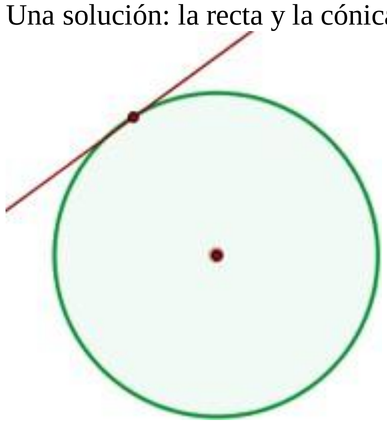
$\boxed{1}$ Si $\mathbf{\Delta > 0}$

Dos soluciones: la recta y la cónica son secantes.



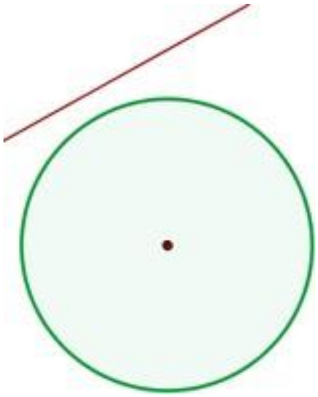
2 Si **Δ = 0**

Una solución: la recta y la cónica son tangentes.

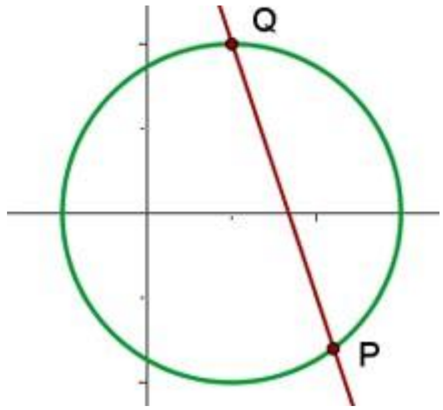


3 Si **Δ < 0**

Ninguna solución: la recta y la cónica son exteriores.



Calcula la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ y larecta $3x + y - 5 = 0$.



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \qquad y = 5 - 3x$$

$$x^2 + (5 - 3x)^2 - 2x - 3 = 0$$

$$5x^2 - 16x + 11 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 220}}{10} = \frac{16 \pm 6}{10} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \frac{11}{5} \\ \searrow x_2 = 1 \end{array}$$

$P\left(\frac{11}{5}, -\frac{8}{5}\right) \qquad Q(1,2)$

Secantes

Determina las coordenadas del centro y del radio de lascircunferencias:

1 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

2 $x^2 + y^2 + 3x + y + 10 = 0$

3 $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$

4 $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$

2 Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(2 , -3)$ y es tangente al eje de abscisas.

3 Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(-1, 4)$ y es tangente al eje de ordenadas.

4 Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de la rectas $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$, y su radio es igual a 5.

5 Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la ecuación , y que pasa por el punto (−3,4).

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$$

6 Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices: A(0, 0), B(3, 1), C(5, 7).

7 Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A(−5, 3) y B(3, 1). ¿Cuál es la ecuación de estacircunferencia?

8 Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

9 Estudiar la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ con las rectas:

1 $x + 7y - 20 = 0$

2 $3x + 4y - 27 = 0$

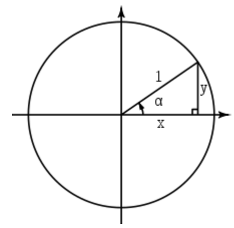
Estudiante				CICLO	V
Periodo	1	GUÍA	02		
Área/asignatura	Matemáticas				
INSTITUCIÓN	Institución Educativa Rosariense del Norte				

ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS

Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextosmatemáticos y en otras ciencias.

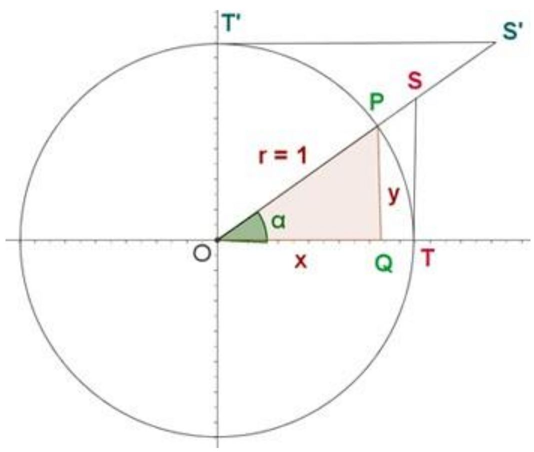
Analizo críticamente la situación de los derechos humanos en Colombia y en el mundo y propongo alternativas para su promoción y defensa. (Competencias cognitivas e integradoras).

a. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS



Se llama a aquélla que tiene su **centro en el origen de coordenadas** y su **radio** es **la unidad**. En la circunferencia goniométrica **los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes** que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

QOP y TOS son triángulos semejantes. QOP y T'OS′ son triángulos semejantes.



El seno es la ordenada.

El coseno es la abscisa.

$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$

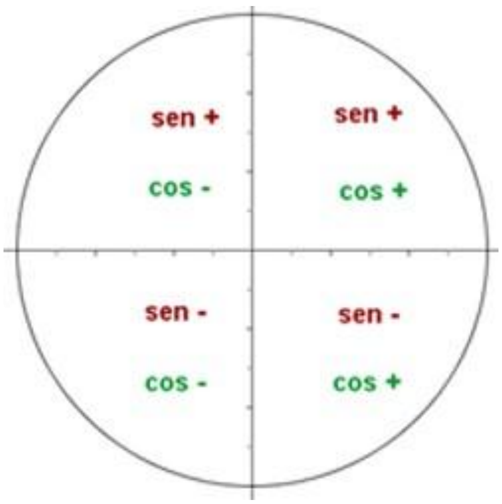
$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = PQ \qquad \text{cosec}\ \alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = OS'$$

$$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ \qquad \sec \alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = OS$$

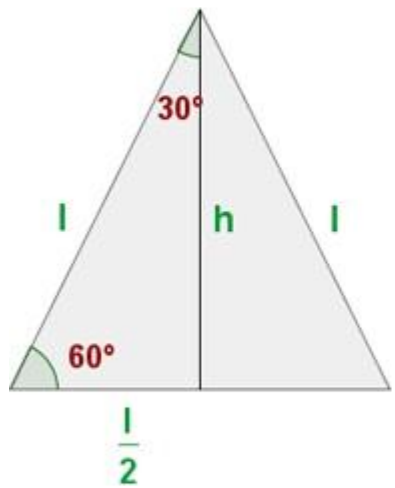
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{S'T'}{OT'} = \frac{S'T'}{r} = S'T'$$

I. Signo de las razones trigonométricas



a. SENO, COSENO Y TANGENTE DE 30º, 45º Y 60º

Si dibujamos un triángulo equilátero ABC, cada uno de sus tres ángulos mide 60º y, si trazamos una altura del mismo, h, el ángulo del vértice A por el que la hemos trazado queda dividido en dos iguales de 30º cada uno. Recurriendo al Teorema de Pitágoras, tenemos que la altura es:



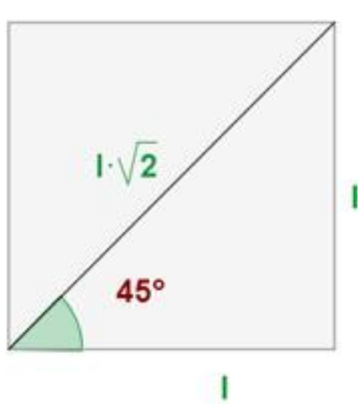
$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\, l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\ 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\, l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

I. SENO, COSENO Y TANGENTE DE 45º

$$d = \sqrt{l^2+l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$



$$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

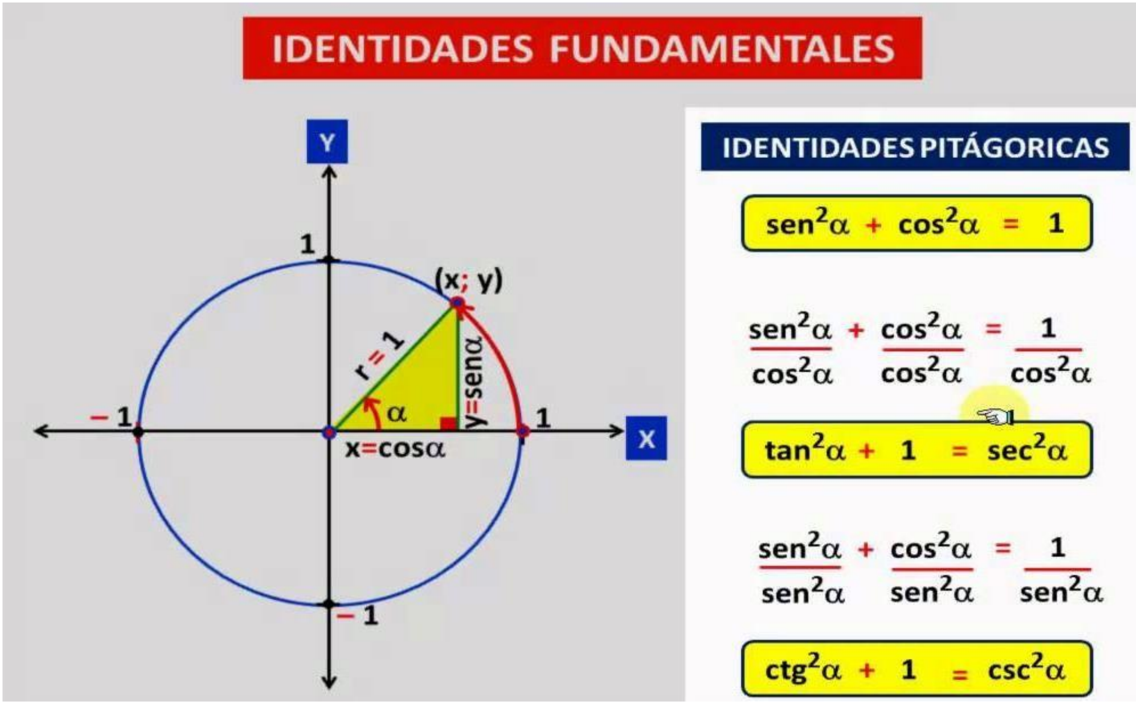
$$\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

I. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

α:	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to \infty$	0	$\to -\infty$

b. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES



$$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

$$\text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

EJERCICIOS

1 Sabiendo que seno α = 3/5, y que 90º <α <180°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \qquad \sec \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \qquad \text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$$

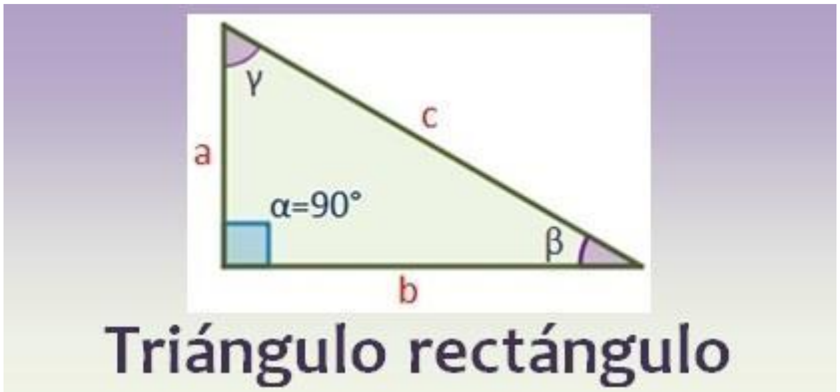
2 Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$$

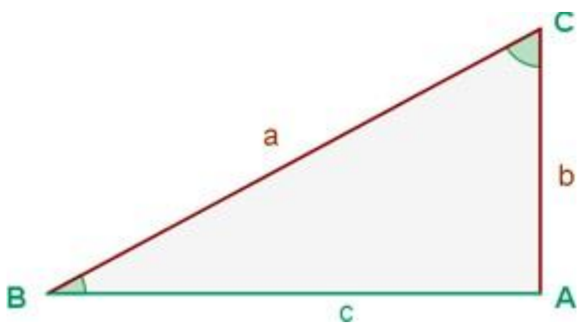
$$\text{sen } \alpha = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \text{cosec } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{tg } \alpha = 2 \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{1}{2}$$

a. Resolución de triángulos rectángulos



$\boxed{1}$ Se conocen la hipotenusa y un cateto:



$$B: \ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad B = \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a}$$

$$C = 90^\circ - B$$

$$c: \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} \quad c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

EJERCICIOS

Resolver el triángulo conociendo:

a = 415 m y b = 280 m.

sen B = 280/415 = 0.6747

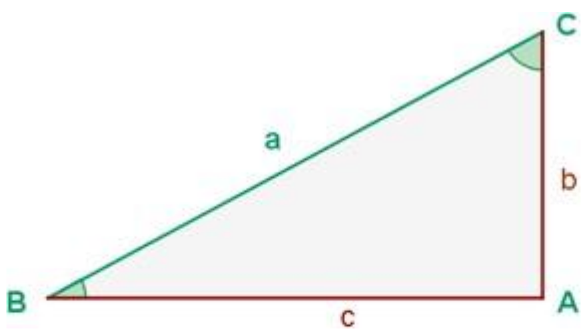
B = arc sen 0.6747 = **42° 25′**

C = 90° - 42° 25′ = **47° 35′**

c = a cos B c = 41

5 · 0.7381 = **306. 31 m**

2 Se conocen los dos catetos:



$$B: \ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \qquad B = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c}$$

$$C = 90° - B$$

$$a: \begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \quad a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \\ a = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$

Resolver el triángulo conociendo:

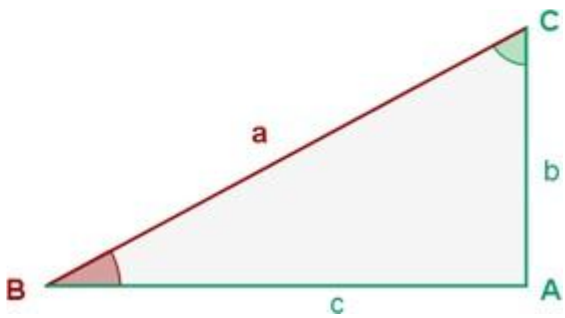
b = 33 m y c = 21 m .

tg B = 33/21 = 1.5714 **B = 57° 32′**

C = 90° − 57° 32′ = **32° 28′**

a = b/sen B a = 33/0.8347 = **39.12 m**

$\boxed{3}$ Se conocen la hipotenusa y un ángulo agudo:



$$C = 90° - B$$

$$b: \ \text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad b = a \cdot \text{sen } B$$

$$c: \begin{cases} \cos B = \dfrac{c}{a} & c = a \cdot \cos B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

Resolver el triángulo conociendo:

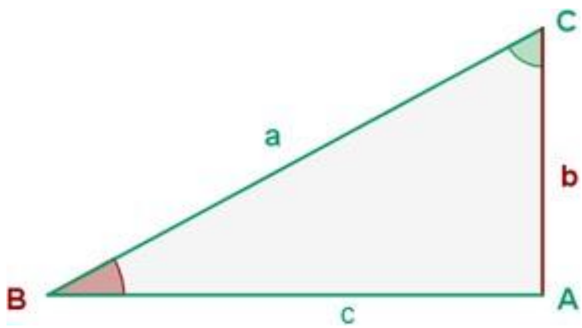
a = 45 m y B = 22°.

C = 90° - 22° = **68°**

b = a sen 22° b = 45 · 0.3746 = **16.85 m**

c = a cos 22° c = 45 · 0.9272 = **41.72 m**

$\boxed{4}$ Se conocen un cateto y un ángulo agudo:



$$C = 90° - B$$

$$a: \ \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$c: \begin{cases} \operatorname{cotg} B = \dfrac{c}{b} \quad c = b \cdot \operatorname{cotg} B \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

Resolver el triángulo conociendo:

b = 5.2 m y B = 37º

C = 90° - 37° = **53º**

a = b/sen B

a = 5.2/0.6018 = **8.64 m**

c = b · cotg B   c = 5.2 · 1.3270 = **6. 9**

Pasa a grados los siguientes ángulos (Arrastra al lugar que corresponda)

$\frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{2\pi}{3}$

45º

15º

30º

270º

120º

2 Pasa a radianes los siguientes ángulos (Arrastra al lugar quecorresponda)

171.89º

120º

51.57°

135°

450°

$\frac{3\pi}{4}$ rad

$\frac{2\pi}{3}$ rad

0.90 rad

3 rad

$\frac{5\pi}{2}$ rad

Elige la opción correcta:

1 La inversa del coseno es...

- el arcoseno
- el arcocoseno
- la secante

2 La inversa de la tangente es...

- la cotangente
- la arcotangente
- la tangente es la inversa de sí misma

3 La cosecante es...

- la inversa del seno
- la opuesta del seno
- la inversa del coseno

4 El resultado de multiplicar el coseno por la secante de un mismo ángulo es...

- 0
- 1
- No se puede saber

5 El resultado de multiplicar el seno por la secante de un mismo ángulo es...

- 0
- 1
- No se puede saber

6 De las siguientes igualdades la correcta es...

- $\text{seno} = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$
- $\text{seno} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$
- $\text{seno} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

7 De las siguientes igualdades la correcta es...

- $\sec = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$
- $\sec = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$
- $\sec = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$

8 De las siguientes igualdades la correcta es...

- $\sec = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$
- $\text{cotg} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$
- $\text{cotg} = \dfrac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$

9 En la circunferencia goniométrica el seno corresponde a...

- la ordenada
- la abcisa

10 En la circunferencia goniométrica el coseno corresponde a...

- la ordenada
- la abcisa

11 En la circunferencia goniométrica el coseno corresponde al...

- eje horizontal
- eje vertical

12 En la circunferencia goniométrica el seno corresponde al...

- Eje horizontal
- Eje vertical

13 En el primer cuadrante...

- El seno es positivo y el coseno negativo
- El seno y el coseno son positivos
- El seno es negativo y el coseno positivo
- El seno y el coseno son negativos

14 En el cuarto cuadrante...

- La tangente es negativa
- La tangente es positiva

15 En el tercer cuadrante...

- El seno es positivo y el coseno negativo
- El seno y el coseno son positivos
- El seno es negativo y el coseno positivo
- El seno y el coseno son negativos

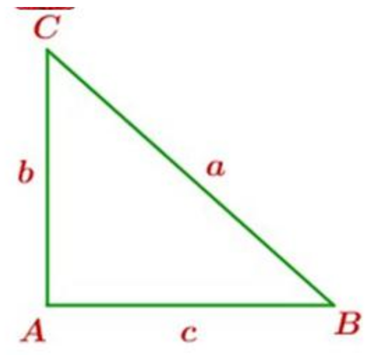
16 En el segundo cuadrante...

- La tangente es negativa
- La tangente es positiva

17 En el cuarto cuadrante...

- El seno es positivo y el coseno negativo
- El seno y el coseno son positivos
- El seno es negativo y el coseno positivo
- El seno y el coseno son negativos

Elige la opción correcta atendiendo al siguiente triángulo rectángulo:



18

- $\text{sen } C = \frac{c}{a}$
- $\text{sen } C = \frac{b}{a}$
- $\text{sen } C = \frac{a}{b}$

19

- $\cos B = \frac{c}{a}$
- $\text{sen } B = \frac{b}{c}$
- Las dos opciones anteriores son correctas

20

- $\sec B = \frac{a}{b}$
- $\sec B = \frac{a}{c}$
- $\sec B = \frac{c}{b}$

21

- $\text{cotg } B = \frac{c}{b}$

- $\text{cotg } B = \frac{b}{a}$
- $\text{cotg } B = \frac{c}{a}$

22

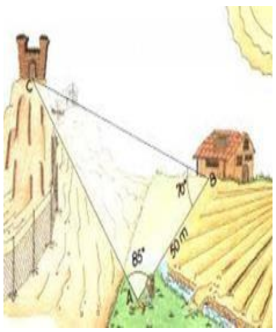
- $\text{tg } C = \frac{c}{a}$
- $\text{tg } C = \frac{b}{c}$
- $\text{tg } C = \frac{c}{b}$

23

- $\text{cosec } B = \frac{a}{b}$
- $\sec C = \frac{a}{b}$
- Las dos opciones anteriores son correctas

Estudiante		**CICLO**	V
Periodo	2	**GUÍA**	03
Área/asignatura	Matemáticas		
INSTITUCIÓN	Institución Educativa Rosariense del Norte		

3. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS, TEOREMAS DEL SENO Y EL COSENO Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

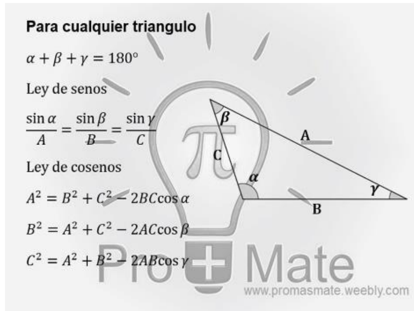


- Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

- Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.

Analizo críticamente la situación de los derechos humanos en Colombia y en el mundo y propongo alternativas para su promoción y defensa. (Competencias cognitivas e integradoras).

a. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS



I. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

1 Relación seno coseno

$$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$$

2 Relación secante tangente

$$\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

3 Relación cosecante cotangente

$$\text{cosec}^2 \alpha = 1 + \text{cotg}^2 \alpha$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$$

EJERCICIOS

1 Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$\cos\ \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\ \alpha = -\sqrt{1+4} = -\sqrt{5}$$

$$sen\ \alpha = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad cosec\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$tg\ \alpha = 2 \qquad cotg\ \alpha = \frac{1}{2}$$

2 Sabiendo que sen α = 3/5, y que 90º <α <180°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} \qquad cosec\ \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\cos\ \alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \qquad \sec\ \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \qquad\qquad \text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

$$sen\,(a+b) = sen\,a\ \cos b + \cos a\ sen\,b$$

$$sen\,(a-b) = sen\,a\ \cos b - \cos a\ sen\,b$$

$$\cos\,(a+b) = \cos\ a\ \cos b - sen\ a\ sen\,b$$

$$\cos\,(a-b) = \cos\ a\ \cos b + sen\ a\ sen\,b$$

$$tg\ (a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$$

$$tg\ (a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a \cdot tg\,b}$$

EJERCICIOS

$$sen\,15° = sen\,(45° - 30°) = sen\,45° \cos 30° - \cos 45° sen\,30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$\cos 15^\circ = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + sen\ 45^\circ sen\ 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

$$tg\ 15^\circ = \frac{tg\,45^\circ - tg\,30^\circ}{1 + tg\,45^\circ \cdot tg\,30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

I. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$sen\,2a = 2\ sen\,a\ \cos a$$

$$\cos\ 2a = \cos^2 a - sen^2 a$$

$$tg\ 2a = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2 a}$$

EJERCICIO

$$sen\ 120° = 2\ sen\ 60° \cos 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\ 120° = \cos^2 60° - sen^2 60° = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$tg\ 120° = \frac{2\,tg\ 60°}{1 - tg^2\ 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

I. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

$$sen\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$tg\ \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

EJERCICIO

$$sen(22°\ 30') = sen\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos(22^\circ\ 30') = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$tg(22^\circ\, 30') = tg\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = -1+\sqrt{2}$$

I. TRANSFORMACIÓN DE OPERACIONES

$\boxed{1}$ Transformaciones de sumas en productos

$$sen\, A + sen\, B = 2\ sen\,\frac{A+B}{2}\ \cos\,\frac{A-B}{2}$$

$$sen\, A - sen\, B = 2\ \cos\,\frac{A+B}{2}\ sen\,\frac{A-B}{2}$$

$$\cos\ A + \cos\ B = 2\ \cos\,\frac{A+B}{2}\ \cos\,\frac{A-B}{2}$$

$$\cos\ A - \cos\ B = -2\ sen\,\frac{A+B}{2}\ sen\,\frac{A-B}{2}$$

EJERCICIO

$$sen\,40° + sen\,20° = 2\ sen\,30°\ \cos\,10°$$

$$sen\,40° - sen\,20° = 2\ \cos\,30°\ sen\ 10°$$

$$\cos\ 40° + \cos\ 20° = 2\ \cos\,30°\ \cos\,10°$$

$$\cos\ 40° - \cos\,20° = -2\ sen\,30°\ sen\,10°$$

$\boxed{2}$ Transformaciones de productos en sumas

$$sen\,A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[sen\,(A+B) + sen\,(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot sen\,B = \frac{1}{2}\left[sen\,(A+B) - sen\,(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$sen\,A \cdot sen\,B = -\frac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right]$$

EJERCICIO

$$sen\,3x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(sen\,4x + sen2x)$$

$$\cos 3x \cdot sen\,x = \frac{1}{2}(sen\,4x - sen2x)$$

$$\cos 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$$

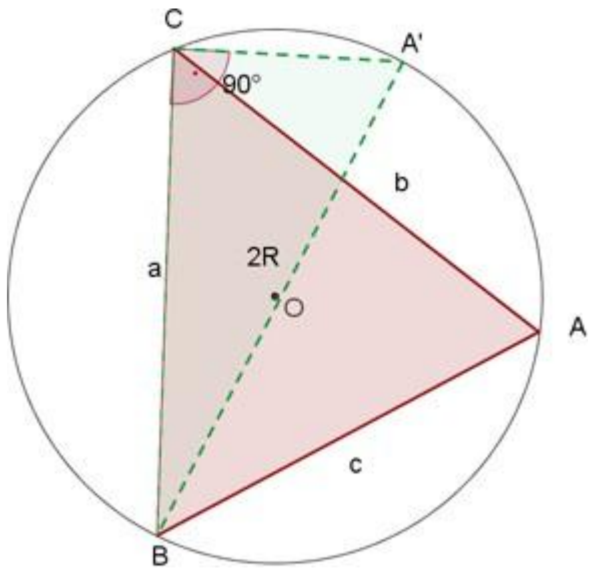
$$sen\,3x \cdot sen\,x = -\frac{1}{2}(\cos\ 4x - \cos 2x)$$

b. Teoremas del seno y coseno

TEOREMA DEL SENO

Cada lado de un triángulo es directamente proporcional al seno del ánguloopuesto.

$$\frac{a}{sen\,a} = \frac{b}{sen\,b} = \frac{c}{sen\,c} = 2R$$



Teorema del coseno

En un triángulo el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto del producto de ambos por el cosenodel ángulo que forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \ \cos A$$

Teorema de la tangente

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg \, \frac{A+B}{2}}{tg \, \frac{A-B}{2}}$$

Ángulo de un triángulo

El área de un triángulo es la mitad del producto de una base por la alturacorrespondiente.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h$$

El área de un triángulo es el semiproducto de dos de sus lados por el seno delángulo que forman.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \operatorname{sen} C$$

El área de un triángulo es el cociente entre el producto de sus lados y cuatroveces el radio de su circunferencia circunscrita.

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

El área de un triángulo es igual al producto del radio de la circunferencia inscritapor su semiperímetro.

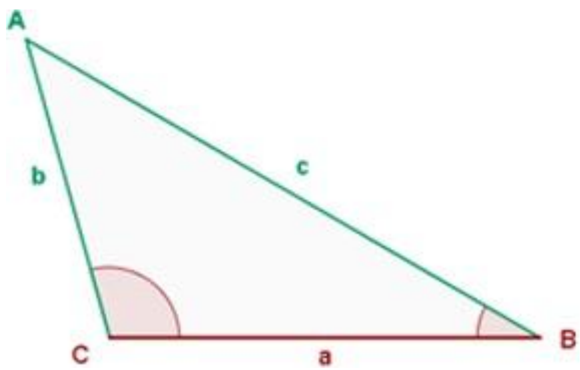
$$S = r \cdot p$$

Fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

EJERCICIO

c. Resolver un triángulo conociendo un lado y dos ángulos adyacentes a él



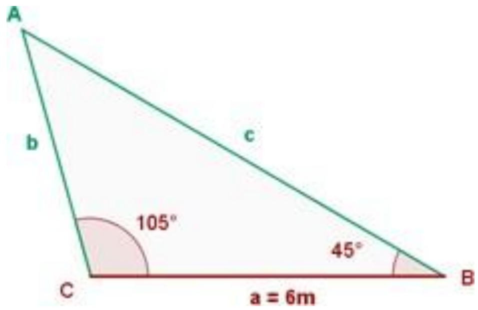
$A = 180° - B - C$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad b = a \cdot \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad c = a \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

EJERCICIO

De un triángulo sabemos que: a = 6 m, B = 45° y C = 105°. Calcula los restanteselementos.

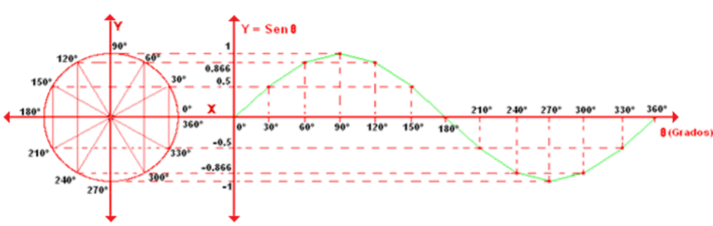


$$A = 180° - 45° - 105° = 30°$$

$$\frac{6}{sen\,30°} = \frac{b}{sen\,45°} \qquad b = 6 \cdot \frac{sen\,45°}{sen\,30°} = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}\,m$$

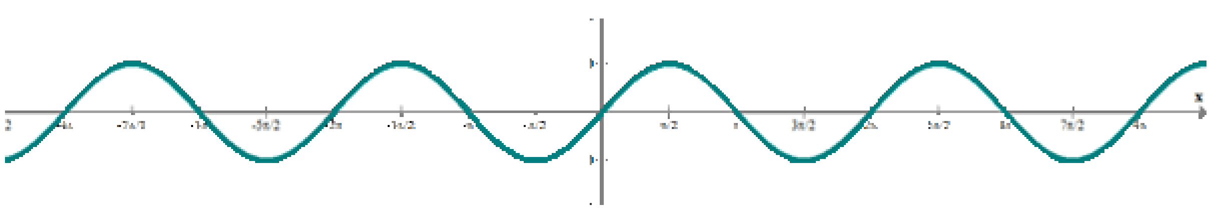
$$\frac{6}{sen\,30°} = \frac{c}{sen\,105°} \qquad c = 6 \cdot \frac{sen\,105°}{sen\,30°} = 11.6m$$

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA



Función del seno

f(x) = sen x



Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-1, 1]$

Período: $2\pi\ rad$

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R}$

Creciente en: $\ldots \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2) \cup \ldots$

Decreciente en: $\ldots \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup (5\pi/2, 7\pi/2) \cup \ldots$

Máximos: $(\pi/2 + 2\pi \cdot k, 1) \quad k \in \mathbb{Z}$

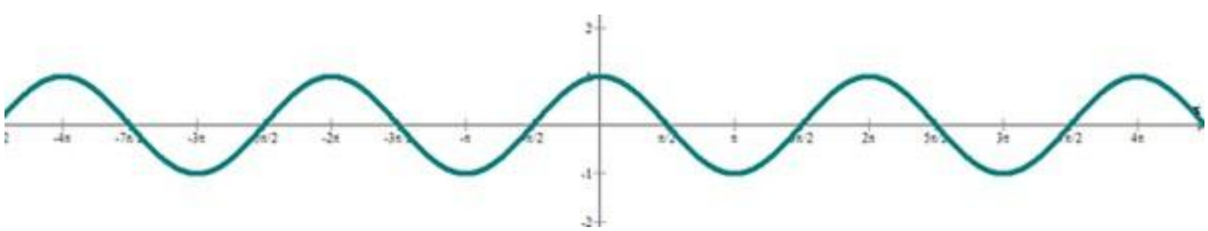
Mínimos: $(3\pi/2 + 2\pi \cdot k, -1) \quad k \in \mathbb{Z}$

Impar: $\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}\ x$

Cortes con el eje OX: $x = \{0 + \pi \cdot k\}$

FUNCIÓN DEL COSENO

f(x) = cos x



Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $[-1, 1]$

Período: $2\pi\ rad$

Continuidad: **Continua en** $\forall x \in \mathbb{R}$

Creciente en: $\ldots \cup (-\pi,\ 0) \cup (\pi,\ 2\pi) \cup \ldots$

Decreciente en: $\ldots \cup (0,\ \pi) \cup (2\pi,\ 3\pi) \cup \ldots$

Máximos: $(2\pi \cdot k,\ 1)$ $k \in \mathbb{Z}$

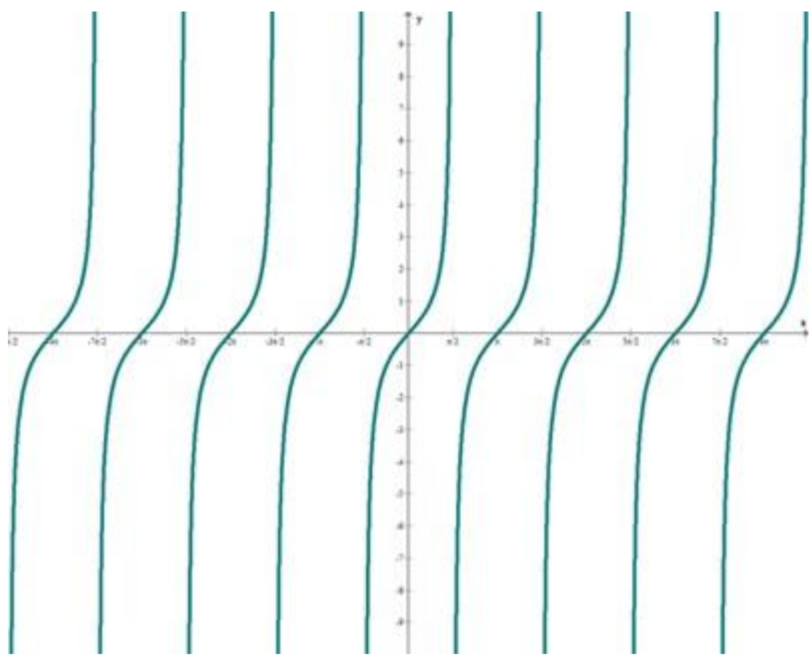
Mínimos: $(\pi \cdot (2k+1),\ -1)$ $k \in \mathbb{Z}$

Par: $\cos(-x) = \cos x$

Cortes con el eje OX: $x = \{\pi/2 + k\}$

FUNCIÓN DE LA

TANGENTE **f(x) = tg x**



Dominio: $\mathbb{R} - \{(2k+1) \cdot \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi/2,\ \pi/2, 3\pi/2,\ \ldots\}$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi \cdot k)\}$

Período: π *rad*

Creciente en: $\mathbb{R}$

Máximos: No tiene.

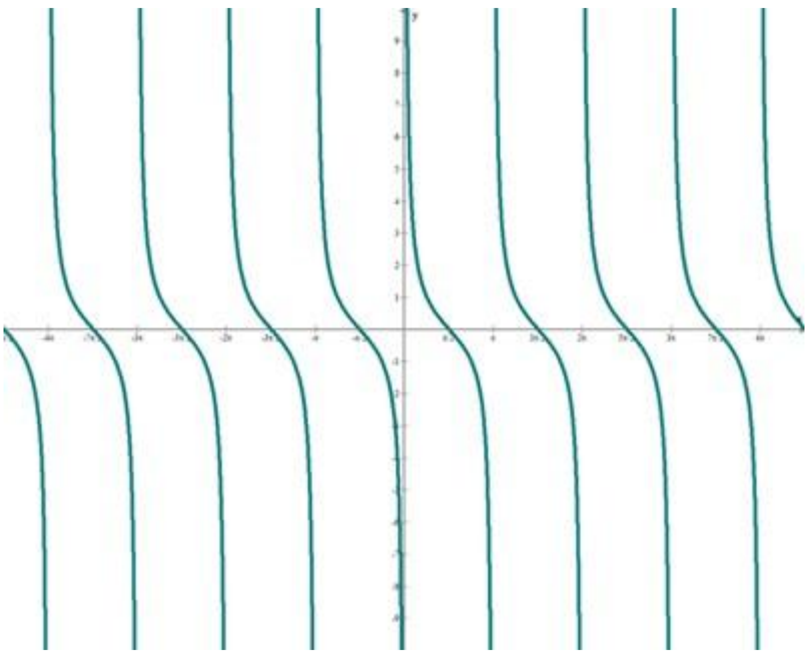
Mínimos: No tiene.

Impar: tg(−x) = −tg x

Cortes con el eje OX: $x = \{0 + \pi \cdot k\}$

FUNCIÓN DE LA

COTANGENTE **f(x) = cotg x**



Dominio: $\mathbb{R} - \{k \cdot \pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Continuidad: Continua en $x \in \mathbb{R} - \{\pi \cdot k \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

Período: π *rad*

Decreciente en: $\mathbb{R}$

Máximos: No tiene.

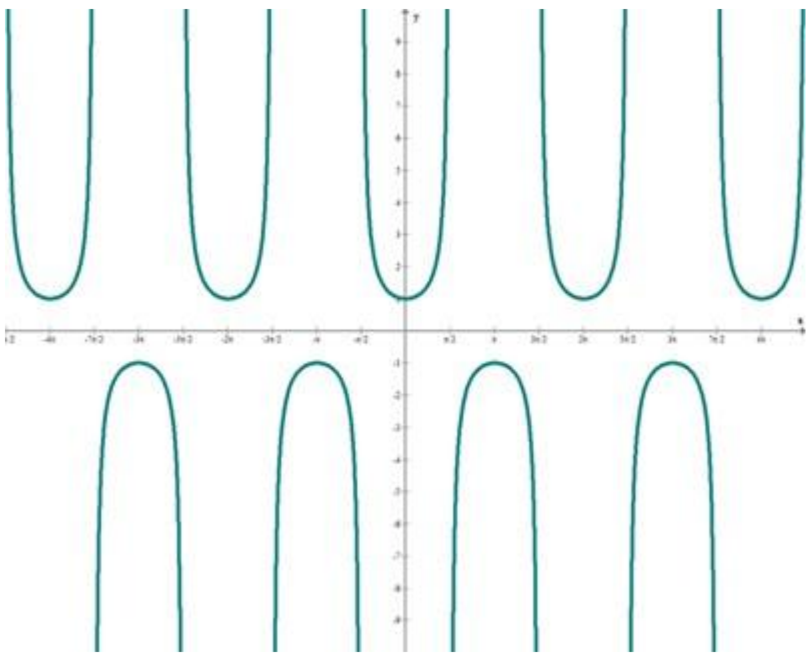
Mínimos: No tiene.

Impar: cotg(−x) = −cotg x

Cortes con el eje OX: $x = \{\pi/2 + k\}$

I. FUNCIÓN DE LA SECANTE

f(x) = sec x



Dominio: $\mathbb{R} - \{(2k+1)\cdot \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi/2,\ \pi/2, 3\pi/2,\ \ldots\}$

Recorrido: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Período: 2π *rad*

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi \cdot k)\}$

Creciente en: $\ldots \cup (0,\ \pi/2) \cup (\pi/2,\ \pi) \cup \ldots$

Decreciente en: $\ldots \cup (\pi,\ 3\pi/2) \cup (3\pi/2,\ 2\pi) \cup \ldots$

Máximos: $(2\pi \cdot k,\ -1)$ $k \in \mathbb{Z}$

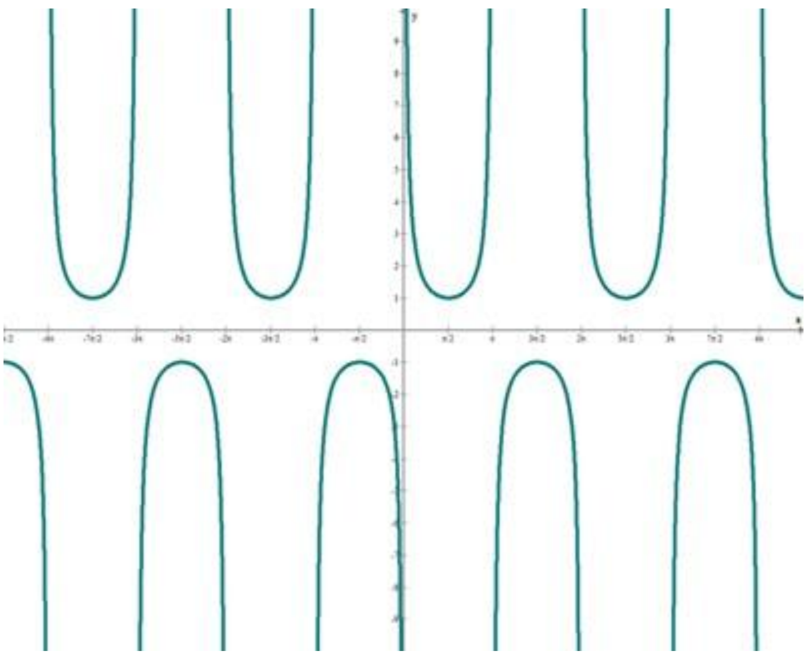
Mínimos: $(\pi \cdot (2k+1),\ -1)$ $\qquad k \in \mathbb{Z}$

Par: $\sec(-x) = \sec x$

Cortes con el eje OX: No corta

II. FUNCIÓN DE LA COSECANTE

f(x) = cosec x



Dominio: $\mathbb{R} - \{k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi,\ 0,\ \pi,\ \ldots\}$

Recorrido: $(-\infty, -1] \quad \cup \quad [1, \infty)$

Período: $2\pi\ rad$

Continuidad: Continua en $x \in \mathbb{R} - \{\pi \cdot k\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Creciente en: $\ldots \cup\ (\pi/2,\ \pi) \cup (\pi,\ 3\pi/2\ ) \cup \ldots$

Decreciente en: $\ldots \cup\ (0,\ \pi/2) \cup (3\pi/2,\ 2\pi) \cup \ldots$

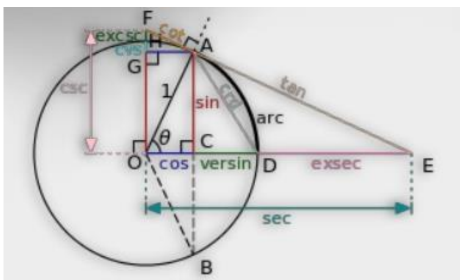
Máximos: $(3\pi/2 + 2\pi \cdot k, -1)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Mínimos: $(\pi/2 + 2\pi \cdot k, -1)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

Impar: cosec(−x) = −cosec x

Cortes con el eje OX: No corta

a. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS



En las **ecuaciones trigonométricas** intervienen funciones trigonométricas, que sonperiódicas y por tanto sus soluciones se pueden presentar en uno o en dos cuadrantes y además se repiten en todas las vueltas.Para resolver una **ecuación trigonométrica** haremos las transformaciones necesarias para trabajar con una sola función trigonométrica, para ello utilizaremos las **identidades trigonométricas fundamentales.**

EJERCICIO

Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

$\boxed{1}$ $2tg\,x - 3\cot g\; x - 1 = 0$

$$2tg\,x - \frac{3}{tg\,x} - 1 = 0 \qquad\qquad 2tg^2\,x - tg\,x - 3 = 0$$

$$tg\,x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$tg\,x = \frac{3}{2} \qquad\qquad x = 56°18'35'' + 180°k$$

$$tg\,x = -1 \qquad\qquad x = 135° + 180°k$$

$\boxed{2}$ $\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$

$$1 - sen^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad\qquad 1 - 4sen^2 x = 0$$

$$sen^2 x = \frac{1}{4} \qquad sen\,x = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = arcsen\,\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360°k \\ x_2 = 150° + 360°k \end{cases}$$

$$x = arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 210° + 360°k \\ x_4 = 330° + 360°k \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $sen\left(2x+60^{o}\right)+sen\left(x+30^{o}\right)=0$

<u>Transformamos la suma en producto</u>

$$2\,sen\left(\frac{3x}{2}+45^{o}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+15^{o}\right)=0$$

Dividimos por 2 en los dos miembros e igualamos cada factor a 0.

$$sen\left(\frac{3x}{2}+45^{o}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{3x}{2}+45^{o}=0^{o}+360^{o}k & x=-30^{o}+120^{o}K\\ \frac{3x}{2}+45^{o}=180^{o}+360^{o}k & x=-30^{o}+120^{o}K\end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}+15^{o}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}+15^{o}=90^{o}+360^{o}k & x=150^{o}+360^{o}\\ \frac{x}{2}+15^{o}=270^{o}+360^{o}k & x=510^{o}+360^{o}K\\ & x=150^{o}+360^{o}K\end{cases}$$

$\boxed{4}$ $sen^{2}x-\cos^{2}x=\frac{1}{2}$

$$sen^{2}x-\cos^{2}x=\frac{1}{2}\qquad\qquad \cos^{2}x-sen^{2}x=-\frac{1}{2}\qquad\qquad \cos 2x=-\frac{1}{2}$$

$$2x=\begin{cases}120^{o}+360^{o}k\\ 240^{o}+360^{o}k\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}60^{o}+180^{o}k\\ 120^{o}+180^{o}k\end{cases}$$

$\boxed{5}$ $sen\,x+\sqrt{3}\cos x=2$

$$sen\,x+\sqrt{3}\cos x=2 \qquad \frac{1}{2}sen\,x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$$

$$sen\left(x+60^{\circ}\right)=1 \qquad x+60^{\circ}=90^{\circ}+360^{\circ}k$$

$$x=30^{\circ}+360^{\circ}k$$

$\boxed{6}$ $sen\,2x=\cos 60^{\circ}$

$$sen\,2x=\cos 60^{\circ} \qquad sen\,2x=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}2x=30^{\circ}+360^{\circ}k \\ 2x=150^{\circ}+360^{\circ}k\end{cases} \qquad \begin{matrix}x=15^{\circ}+180^{\circ}k \\ x=75^{\circ}+180^{\circ}k\end{matrix}$$

$\boxed{7}$ $2\cos x=3tg\,x$

$$2\cos x=\frac{3sen\,x}{\cos x} \qquad 2\cos^2 x=3sen\,x$$

$$2\left(1-sen^2x\right)=3sen\,x \qquad 2-2sen^2x=3sen\,x$$

$$2sen^2x+3sen\,x-2=0$$

$$sen\,x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}$$

$$sen\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

$sen\,x = -2$ Sin solución porque $-1 \le sen\,x \le 1$

8 $sen\,2x \cdot \cos x = 6sen^3 x$

$$2sen\,x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6sen^3 x$$

$$sen\,x\left(\cos^2 x - 3sen^2 x\right) = 0$$

$$sen\,x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0^\circ + 360^\circ k \\ x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k$$

$$\cos^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad \cos^2 x = 3sen^2 x$$

$$tg^2 x = \frac{1}{3} \qquad tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30^\circ + 180^\circ k$$

$$tg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150^\circ + 180^\circ k$$

9 $4sen\,\frac{x}{2} + 2\cos x = 3$

$$4sen\frac{x}{2}+2\left(\cos^2\frac{x}{2}-sen^2\frac{x}{2}\right)=3$$

$$4sen\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-2sen^2\frac{x}{2}=3$$

$$4sen\frac{x}{2}+2\left(1-sen^2\frac{x}{2}\right)-2sen^2\frac{x}{2}=3$$

$$4sen^2\frac{x}{2}-4sen\frac{x}{2}+1=0$$

$$\left(2sen\frac{x}{2}-1\right)^2=0 \qquad 2sen\frac{x}{2}-1=0$$

$$sen\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\quad\begin{cases}\frac{x}{2}=30°+360°k & x=60°+360°k\\ \frac{x}{2}=150°+360°k & x=300°+360°k\end{cases}$$

Comprobar las identidades:

1 $sen\,b\cdot\cos(a-b)+\cos b\cdot sen(a-b)=sen\,a$

2 $\operatorname{cotg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{cotg}a\cdot\operatorname{cotg}b-1}{\operatorname{cotg}a+\operatorname{cotg}b}$

2 Simplificar las fracciones:

1 $\dfrac{sen\,2x}{1+\cos 2x}$

2 $\dfrac{sen\,2a}{1-\cos^2 a}\cdot\dfrac{sen\,2a}{\cos a}$

3 $\dfrac{sen\,3a-sen\,5a}{\cos 3a+\cos 5a}$

3 Calcular las razones de 15º (a partir de las de 45º y 30º).

4 Desarrollar: cos(x+y+z)

Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

1 $2tg\,x - 3\cotg\ x - 1 = 0$

2 $\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$

Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

1 $sen\,(2x + 60^\circ) + sen\,(x + 30^\circ) = 0$

2 $sen^2 x - \cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

7 Resuelve las ecuaciones trigonométricas:

1 $sen\,x + \sqrt{3}\cos x = 2$

2 $sen\,2x = \cos 60^\circ$

8 Resuelve los sistemas de ecuaciones trigonométricas:

1 $\begin{cases} sen\,x + sen\,y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$

2 $\begin{cases} sen\,x + sen\,y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen\,x - sen\,y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$

3 $\begin{cases} tg\,x + tg\,y = 1 \\ \cotg\ (x + y) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

EJERCICIOS

1 Resuelve:

1. $\operatorname{sen} x = 0$
2. $\cos x = 0$
3. $tg\ x = 0$
4. $\operatorname{sen} x = 1$
5. $\cos x = 1$
6. $tg\ x = 1$
7. $\operatorname{sen} x = -1$
8. $\cos x = -1$
9. $tg\ x = -1$
10. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$
11. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$
12. $\cos x = \frac{1}{2}$
13. $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{2}$ $sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{3}$ $2tg\,x-3cotg\;x-1=0$

$\boxed{4}$ $3sen^2\,x-5sen\,x+2=0$

$\boxed{5}$ $\cos^2 x-3sen^2 x=0$

$\boxed{6}$ $\cos 2x=1+4sen\,x$

$\boxed{7}$ $sen\,(2x+60°)+sen\,(x+30°)=0$

$\boxed{8}$ $sen^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$

$\boxed{9}$ $\cos 8x+\cos 6x=2\cos 210°\cdot\cos x$

$\boxed{10}$ $tg\;2x=-tg\,x$

$\boxed{11}$ $sen 2x=\cos 60°$

$\boxed{12}$ $4sen\,(x-30°)\cos\,(x-30°)=\sqrt{3}$

$\boxed{13}$ $2\cos x=3tg\,x$

$\boxed{14}$ $sen\,x+\sqrt{3}\cos x=2$

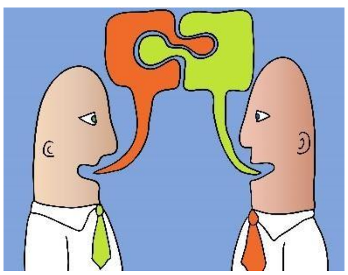
$\boxed{15}$ $sen\,2x\cdot\cos x=6sen^3 x$

$\boxed{16}$ $4\,sen\,\frac{x}{2}+2\cos x=3$

Estudiante		CICLO	V
Periodo	2	**GUÍA**	04
Área/asignatura	Matemáticas		
INSTITUCIÓN	Institución Educativa Rosariense del Norte		

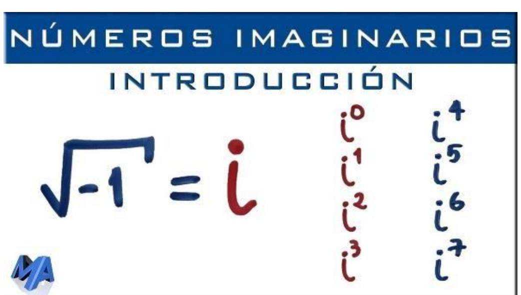
4. NÚMEROS COMPLEJOS

Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso enuna situación dada.



Manifiesto indignación (dolor, rabia, rechazo) de manera pacífica ante el sufrimiento de grupos o naciones que están involucradas en confrontaciones violentas. (Competencias emocionales).

a. Números imaginarios



UNIDAD IMAGINARIA

La **unidad imaginaria** es el número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra ***i.***

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

II. Números imaginarios

Un número imaginario se denota por bi, donde:

b es un número real

i es la unidad imaginaria

Con los números imaginarios podemos calcular raíces con índice par y radicando negativo.

x2 + 9 = 0

$$x^2 = -9 \qquad x = \pm\sqrt{-9} \begin{cases} \nearrow x_1 = 3i \\ \searrow x_2 = -3i \end{cases}$$

b. Potencias de la unidad imaginaria

i0 = 1
i1 = i
i2 = −1
i3 = −i i4 = 1

Los valores se repiten de cuatro en cuatro, por eso, para saber cuánto vale unadeterminada potencia de ***i***, se divide el exponente entre **4**, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada.

EJERCICIO

i^{27}

$$\begin{array}{l|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$$

$$i^{27} = (i^4)^6 \cdot i^3 = i^3 = -i$$

$$i^{27} = -i$$

i^{22}

$$\begin{array}{l|l} 22 & 4 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

$$i^{22} = (i^4)^5 \cdot i^2 = i^2 = -1$$

$$i^{22} = -1$$

Números complejos en forma binómica

Al número **a + b*i*** le llamamos número complejo en forma binómica.

El número **a** es la **parte real** del número complejo.

El número **b** es la **parte imaginaria** del número complejo.

Si **b = 0** el número complejo se reduce a un número real ya que **a + 0*i* = a**.

Si **a = 0** el número complejo se reduce a ***bi***, y se dice que es un número imaginario puro.

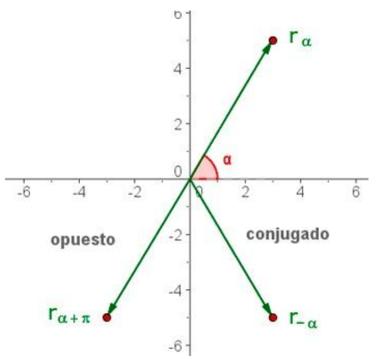
El conjunto de todos números complejos se designa por. $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Los números complejos **a + bi** y **-a -b*i*** se llaman **opuestos**.
Los números complejos **z=a+b*i*** y **z =a−b*i*** se llaman **conjugados**.

Dos números complejos son iguales cuando tienen la misma componente real y la misma componente imaginaria.

Representación de números complejos

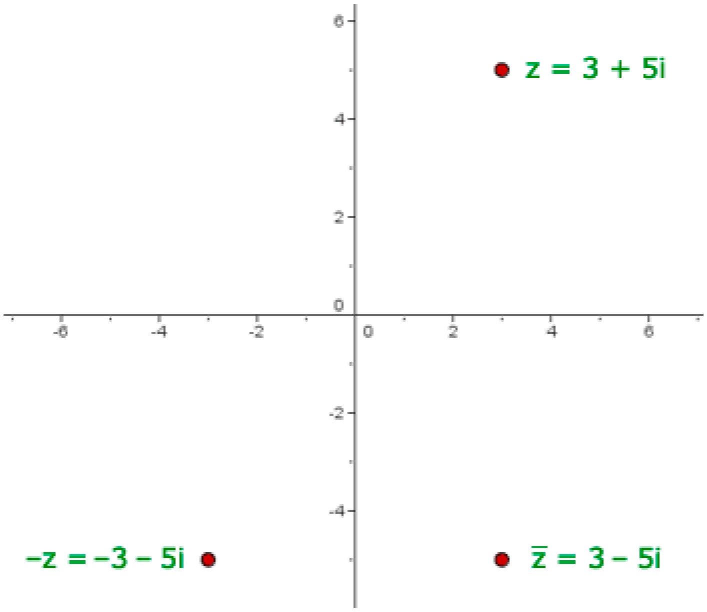


Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos.

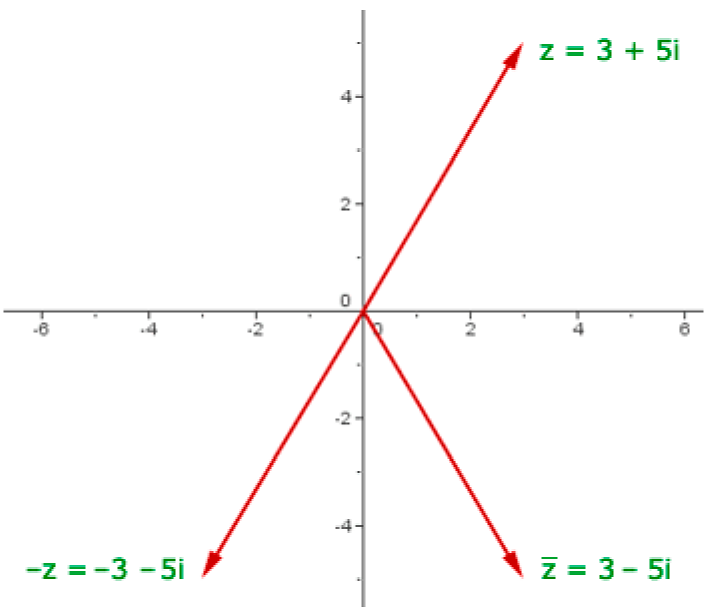
El eje X se llama **eje real**.
El eje Y se llama **eje imaginario**.

El número complejo **a + b*i*** se representa:

1 Por el punto (a, b), que se llama su **afijo**.

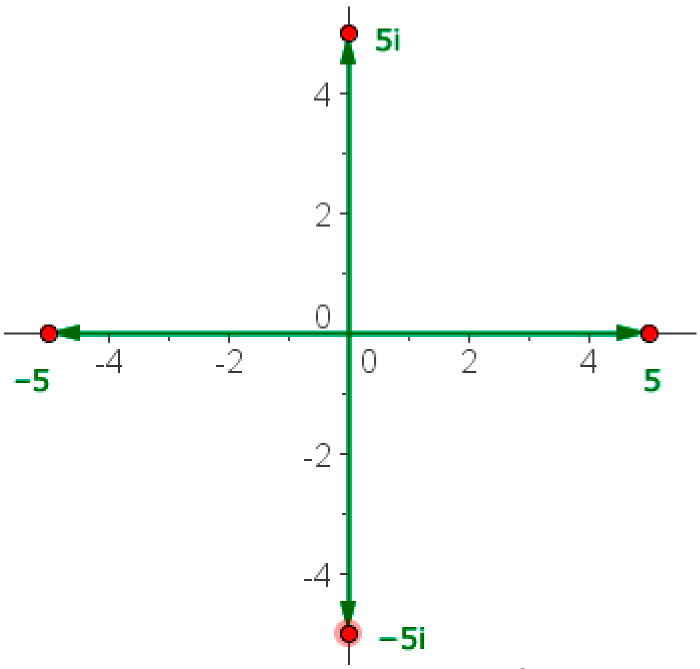


2 Mediante un vector de origen (0, 0) y extremo (a, b).

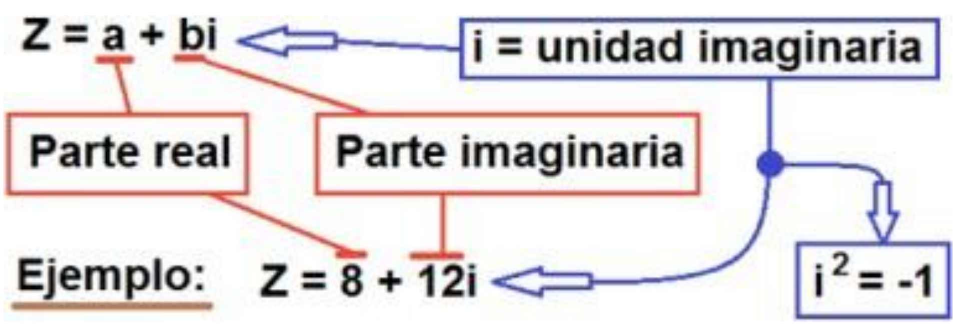


Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real, X.

Los afijos de los números **imaginarios** se sitúan sobre el **eje imaginario**, Y.



a. **Operaciones con números complejos**



Suma y diferencia

La suma y diferencia de números complejos se realiza sumando y restando laspartes reales y las partes imaginarias entre sí, respectivamente.

(**a** + **b***i*) + (**c** + **d***i*) = **(a + c)** + **(b + d)***i*

(**a** + **b***i*) − (**c** + **d***i*) = **(a − c)** + **(b − d)***i*

EJERCICIO

$(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) =$
$= (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i =$ **$-7 + 7i$**

Multiplicación de números complejos

El producto de los números complejos se realiza aplicando la propiedaddistributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que **$i^2 = -1$.**$(a + bi) \cdot (c + di) =$ **$(ac - bd) + (ad + bc)i$**

EJERCICIO

$(5 + 2\,i) \cdot (2 - 3\,i) =$

$= 10 - 15i + 4i - 6i2 = 10 - 11i + 6 =$ **$16 - 11i$**

I. División de números complejos

El cociente de números complejos se realiza multiplicando numerador ydenominador por el conjugado de este.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} =$$

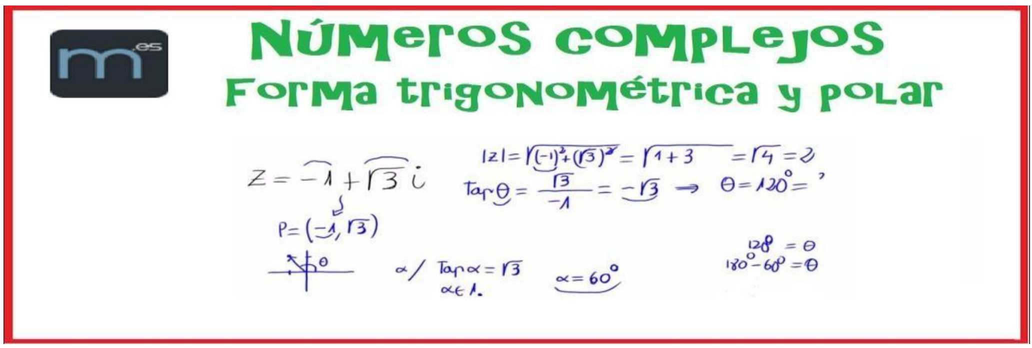
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo:

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{(3+2i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)} = \frac{3+6i+2i+4i^2}{1-(2i)^2} =$$

$$= \frac{3+8i-4}{1+4} = -\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

Números complejos en forma polar y trigonométrica

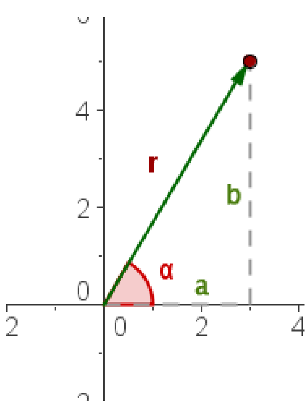


MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

El módulo de un número complejo es el módulo del vector determinado por elorigen de coordenadas y su afijo. Se designa por **|z|**.

$$z = a + bi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Argumento de un número complejo

El argumento de un número complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real. Se designa por **arg(z)**.

Para calcular el argumento, calculamos el arcotangente de b/a prescisdiendo de los signos, para ubicar el cuadrante en que se encuentra tendremos en cuenta:

$$\alpha = \operatorname{arc} tg \frac{b}{a} \qquad \begin{cases} \dfrac{+b}{+a} = \alpha \\ \dfrac{+b}{-a} = 180^\circ - \alpha \\ \dfrac{-b}{-a} = 180^\circ + \alpha \\ \dfrac{-b}{+a} = 360^\circ - \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{0}{+a} = 0^\circ \\ \dfrac{0}{-a} = 180^\circ \\ \dfrac{+b}{0} = 90^\circ \\ \dfrac{-b}{0} = 270^\circ \end{cases}$$

Expresión de un número complejo en forma polar

$z = r_\alpha$

$|z| = r$ → **(r es el módulo)**

$\arg(z) = \alpha$ → **(α es el argumento)**

Ejemplos de conversión de la forma polar a la forma binómica:

$z = 2_{120^\circ}$

Para pasar de la forma polar a la binómica, tenemos que pasar en primer lugara la **forma trigonométrica**:

$$\mathbf{z = r_\alpha = r\,(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\ \alpha)}$$

$$z = 2 \cdot (\cos 120^{o} + i \text{ sen } 120^{o})$$

$$a = 2 \cdot \cos 120^{o} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$b = 2 \cdot \text{sen } 120^{o} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}\, i$$

Reales e imaginarios puros de módulo unidad:

$z = 1_{0^{o}} = \mathbf{1}$

$z = 1_{180^{o}} = \mathbf{-1}$

$z = 1_{90^{o}} = \boldsymbol{i}$

$z = 1_{270^{o}} = \boldsymbol{-i}$

Ejemplos

$$z = 1 + \sqrt{3}\, i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^{o}$$

$$z = 2_{60^{o}}$$

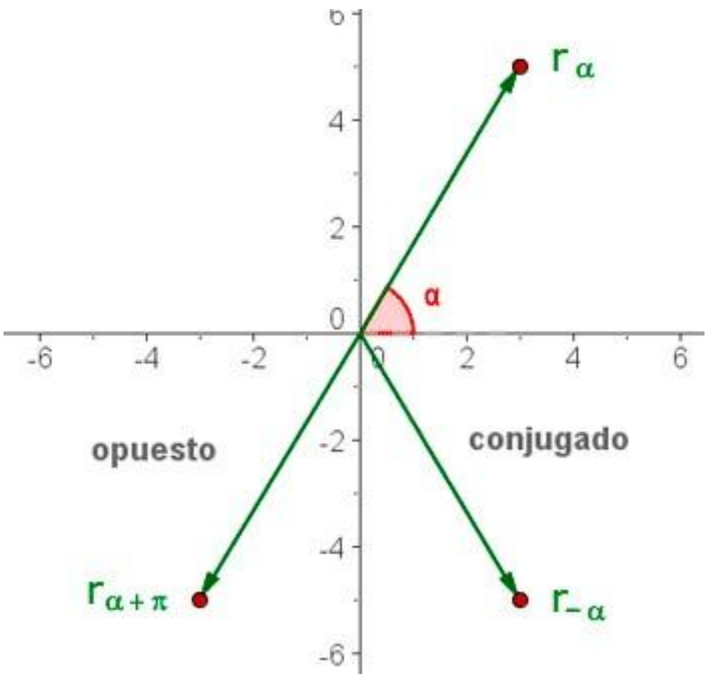
$$z = -1 + \sqrt{3}\, i$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{+\sqrt{3}}{-1} = 120^{o}$$

$$z = 2_{120^{o}}$$

Números complejos iguales, conjugados, opuestos e inversos



NÚMEROS COMPLEJOS IGUALES

Dos números complejos son **iguales** si tienen el mismo módulo y el mismoargumento.

$$r_\alpha = r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = \alpha + 2\pi k \end{cases}$$

NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS

Dos números complejos son **conjugados** si tienen el mismo módulo y opuestossus argumentos.

$$r_\alpha \ \textit{conjugado} \ r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

I. Números complejos opuestos

Dos números complejos son **opuestos** si tienen el mismo módulo y susargumentos se diferencian en **π** radianes.

$$r_\alpha \ \textit{opuesto} \ r'_{\alpha'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \alpha' = (\alpha + \pi) + 2\pi k \end{cases}$$

II. Números complejos inversos

El **inverso** de un número complejo no nulo tiene por módulo el inverso delmódulo y por argumento su opuesto.

$$\frac{1}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$$

b. Operaciones con números complejos en forma polar y trigonométrica

I. MULTIPLICACIÓN DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR

La multiplicación de dos números complejos es otro número

complejo tal que:Su módulo es el producto de los módulos.

Su argumento es la suma de los argumentos.

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

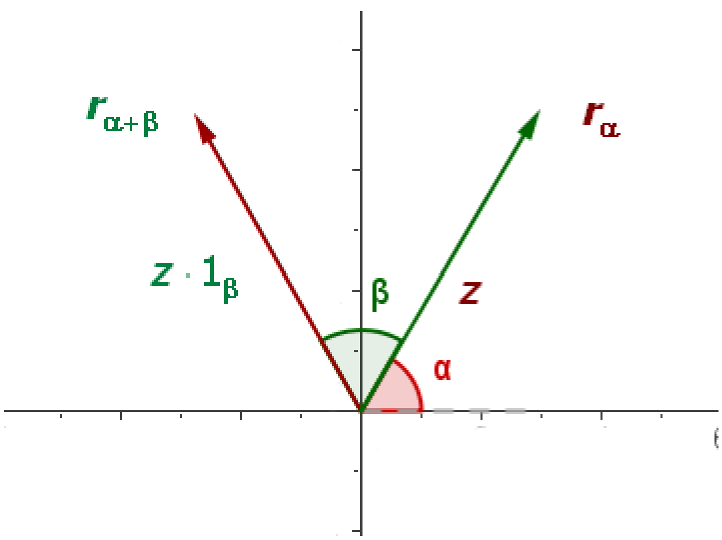
EJERCICIO

$$6_{45^\circ} \cdot 3_{15^\circ} = (6 \cdot 3)_{45^\circ + 15^\circ} = 18_{60^\circ}$$

I. PRODUCTO POR UN COMPLEJO DE MÓDULO 1

Al multiplicar un número complejo $z = r_\alpha$ por 1_β se gira z un ángulo β alrededordel origen.

$$r_\alpha \cdot 1_\beta = r_{\alpha+\beta}$$



II. DIVISIÓN DE COMPLEJOS EN FORMA POLAR

La división de dos números complejos es otro número complejo tal que: Su módulo es el cociente de los módulos.

Su argumento es la diferencia de los argumentos.

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

EJERCICIO

$$6_{45^\circ} : 3_{15^\circ} = (6:3)_{45^\circ - 15^\circ} = 2_{30^\circ}$$

EJERCICIOS

1 Calcular todas las raíces de la ecuación:

$$x^6 + 1 = 0$$

2 Realiza las siguientes operaciones

1 $\dfrac{(3_{20^\circ})^3}{2_{60^\circ}}$

2 $(1+i)^{10}$

3 $(1+\sqrt{3})^6$

3 $\sqrt[3]{\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}}$

4

Resuelve la siguiente raíz, expresando los resultados en forma polar.

$$\sqrt[5]{10+10i}$$

4 Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $1+2i$ y su conjugado.

5 Calcula la siguiente operación, dando el resultado en forma polar.

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}$$

6 Calcula el valor de cociente, y representa los afijos de sus raíces cúbicas.

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$$

3 Resuelve la siguiente raíz, expresando los resultados en forma polar.

$$\sqrt[5]{10+10i}$$

4 Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $1+2i$ y su conjugado.

5 Calcula la siguiente operación, dando el resultado en forma polar.

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)}$$

6 Calcula el valor de cociente, y representa los afijos de sus raíces cúbicas.

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$$

7 Expresa en forma polar y binómica un complejo cuyo cubo

$$8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

8 Expresa en función de cos α y sen α:

1 $\cos 5a$

2 $\mathrm{sen}\, 5a$

9 Escribe en las formas polar y trigonométrica, los conjugados y los opuestos de:

1 $4 + 4i$

2 $-2 + 2i$

10 Calcular todas las raíces de la ecuación:

$$x^5 + 32 = 0$$

11 Expresa en función de cos α y sen α:

1 $\cos 3a$

2 $\mathrm{sen}\, 3a$