<table>
<tr><th colspan="6">Estrategia Didáctica</th></tr>
<tr><td>Sede</td><td colspan="5">Principal</td></tr>
<tr><td>Eje temático</td><td>P. MATEMATICO</td><td>Tema:</td><td>FUNCIONES TRIGONOMETRICAS</td><td>Grado</td><td>DECIMO</td></tr>
<tr><th>Criterio</th><th colspan="5">Contenidos (sub temas)</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">➢ Ángulos.
➢ Ángulos en posición normal.
➢ Medición de ángulos en el sistema sexagesimal.
➢ Ángulos coterminales.
➢ Medición de ángulos en el sistema cíclico.
➢ Longitud de arco.
➢ Movimiento circular.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Secuencia didáctica</th></tr>
<tr><td>Inicio</td><td colspan="5">En esta secuencia didáctica en su momento inicial se encuentra:
✓ Actividades de Conocimientos previos: permite al estudiante recordar y reconocer algunos temas que serán de apoyo y ayuda al presente tema.
✓ Situación de aprendizaje, que permite al estudiante introducirse en el tema a partir de la aplicación práctica relacionada con la vida cotidiana, el contexto y la transversalizacion con otras ejes y motiva la indagación y el descubrimiento.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td><td colspan="5">Esta secuencia didáctica en su momento de desarrollo consta de:
✓ Conceptualización y ejemplos: son todos los conceptos y ejemplos paso a paso necesarios para entender el tema y construir conocimiento escribiendo la teoría en el cuaderno de apuntes.
✓ Actividades: permite adquirir habilidades para interpretar, argumentar, proponer, ejercitar, razonar, modelar o solucionar problemas. Todos los ejercicios propuestos en cada actividad se deben desarrollar paso a paso en el cuaderno correspondiente.
✓ Pregunta tipo saber: Permiten el desarrollo de capacidades para razonar e interpretar y dar respuesta a preguntas de este tipo.
✓ Solución de problemas transversalizados: Ubica al estudiante en su contexto y le permite interpretar situaciones de la vida cotidiana.</td></tr>
<tr><td>Cierre</td><td colspan="5">Esta secuencia didáctica en su momento final consta de:
✓ Evaluación: Permite reconocer el desempeño que tuvo el estudiante en el desarrollo de todas las actividades.
✓ Juego o actividad lúdico pedagógica: Permite llevar a la practica el tema estudiado mediante la aplicación de lo aprendido a un juego tradicional o actividades culturales.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Evaluación</td><th colspan="5">Criterios de Evaluación</th></tr>
<tr><td colspan="5">➢ Construye su propio conocimiento, a partir de lo que ya sabe.</td></tr>
<tr><td colspan="5">➢ Se observa las habilidades para el desarrollo de competencias matemáticas en la resolución de actividades propuestas.</td></tr>
<tr><td colspan="5">➢ Plantea y soluciona problemas de la vida real.</td></tr>
<tr><td colspan="5">➢ Adquiere destrezas a lo largo del desarrollo de la secuencia didáctica.</td></tr>
</table>

FUNCIONES

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

1. Evalúa las siguientes funciones:

x	**-3**	**-2**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
F(x)									

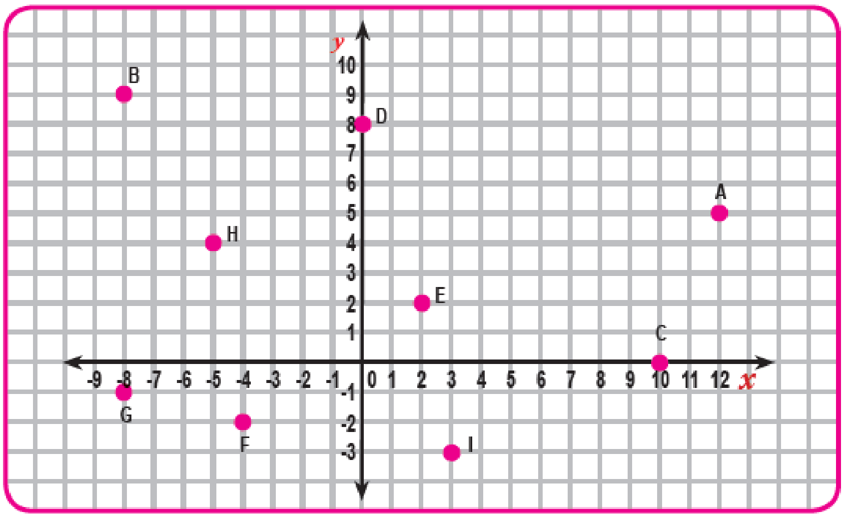
2. Construir una tabla de valores para cada una de las siguientes funciones:

a. $y=3x+2$
b. $f(x)=2x$
c. $y=x_2-4$
d. $f(x) = x$

3. Complete la siguiente tala, teniendo en cuenta el primer ejemplo:

Función expresada mediante un ENUNCIADO	**Función expresada mediante EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
La función que a cada número le asocia su doble	$y=2x$
La función que a cada número le asocia su triple más 5	
	$y=2x+1$
La función que a cada número le asocia su mitad	
La función que a cada número le asocia su opuesto	
	$y=-x+2$
La función que expresa la distancia recorrida cada hora por un automóvil que circula a 60 km/h	
	$y=x^2$
La función que relaciona el radio de una circunferencia y su perímetro	
La función que relaciona el radio de una circunferencia y su área	

4. Escribe las coordenadas de los puntos representados en el plano.



5. Ubica en el plano cartesiano los puntos dado.

A (6, 10)

B (−6, 5)

C (10, 10)

D (3, −2)

E (8, −4)

F (−1, −1)

G (6, 0)

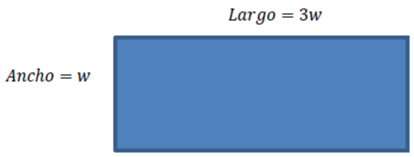
H (0, −2)

I (−8, −10)

J (−10, 7)

SITUACION DE APRENDIZAJE

La longitud de un lote de una finca rectangular de la comunidad de Segovia es tres veces su ancho. Encuentre una función que modele su área en términos de su ancho w.

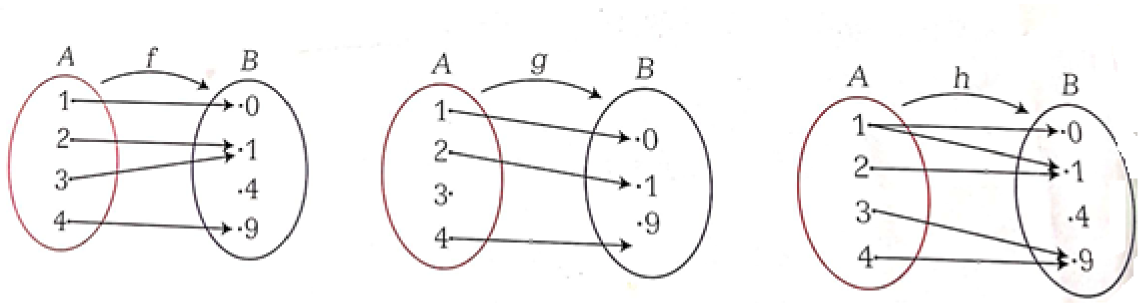


La función área A (w), para el lote rectangular es:
Área= Larg . ancho
A(w)=3w.w=3w^2

CONCEPTO DE FUNCION

FUNCION: Es una regla que asigna a cada elemento del conjunto de partida un solo elemento del conjunto de llegada.
El conjunto A es el conjunto de partida y el conjunto B es el conjunto de llegada, por tal razón una función que va del conjunto A al conjunto B se caracteriza por dos condiciones fundamentales:
• Cada uno de los elementos del conjunto A estaá relacionado con algún elemento del conjunto B.
• Un elemento de A solo debe estar relacionado con uno y solo un elemento de B, esto significa que los elementos de A no pueden estar relacionados con dos elementos de B.

EJEMPLO:



REPRESENTACION DE UNA FUNCION

Una función se puede representar de cuatro formas diferentes.

<table>
<tr><td>

- **VERBALMENTE:** Mediante una oración que describa la función.

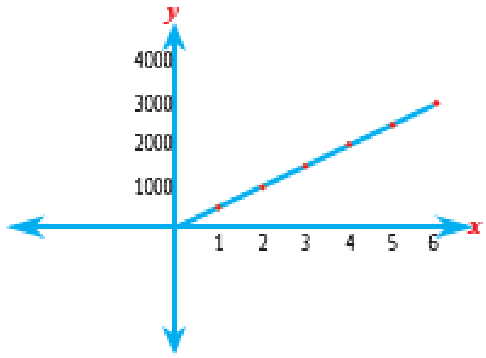
</td><td>
EJEMPLO:
Un kilogramo de plátano en la comunidad u'wa cuesta: $500. ¿Cómo se relaciona la cantidad de kilogramos con su precio?
</td></tr>
<tr><td>

- **NUMERICAMENTE:** Mediante una tabla de valores.

</td><td>
EJEMPLO:
Sí un kilo de plátano vale $500.
¿Cuánto cuestan 2,3,4,5,6 y 7kilogramos?
<table>
<tr><th>x(kilogramos)</th><th>f(x) $</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>500</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1500</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2500</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3000</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>

- **GRAFICAMENTE:** Mediante puntos en ele plano cartesiano (x,y) con y(f(x)

</td><td>
EJEMPLO:



</td></tr>
<tr><td>

- **ALGEBRAICAMENTE:** Mediante la ecuación de la función y=f(x)

</td><td>

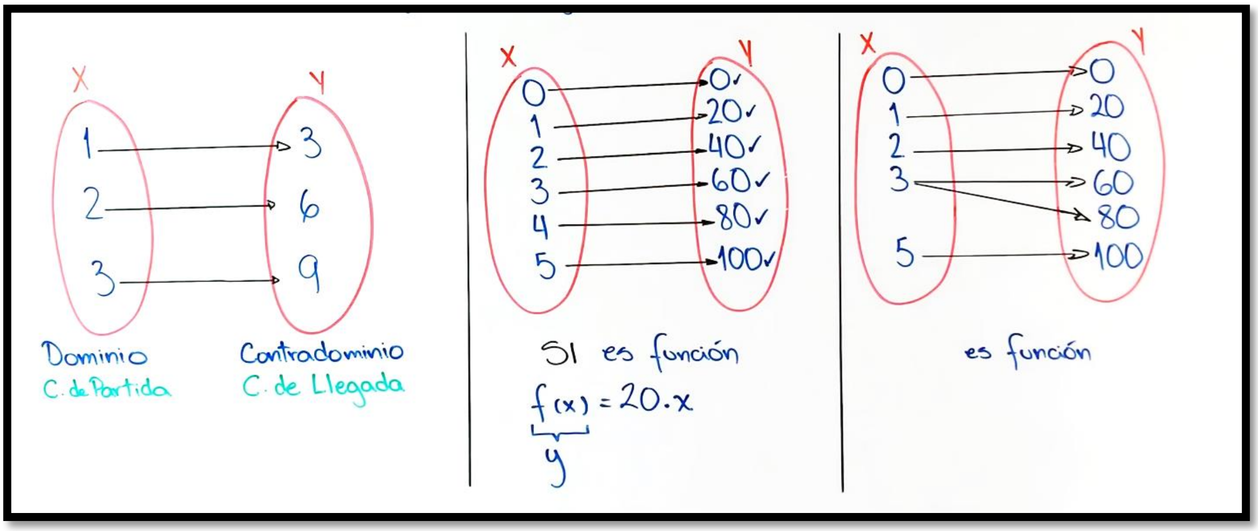
$$f(x) = 500x$$

</td></tr>
</table>

NOCION DE FUNCION

Generalmente, para nombrar una función se usan letras minúsculas como f, g, h, y se escribe f: A→ B para indicar que la función se ha definido del conjunto A, conjunto de partida, en el conjunto B, conjunto de llegada.
Si x € A, y € B y y=f(x), entonces se dice que x está relacionado con y mediante la función f y se lee "y es igual a f de x". A y se le denomina "la imagen de x" mediante f. La representación de una función f se puede realizar mediante un diagrama sagital.
A x se le denomina variable independiente y a y variable dependiente ya que el valor que toma depende del valor de x.

Variable Independiente: Corresponde a la primera variable y se le suele asignar la letra *x*.
Variable Dependiente: Es la que se deduce de la variable independiente y se le suele designar con la letra *y*, o como *f* (*x*).
Ejemplo de función.



EVALUACION DE FUNCIONES

Evaluar una función consiste en determinar el valor de la variable dependiente, dado el valor de la variable independiente. Si la función se escribe como $f(x)$, la función evaluada para un valor numérico, como 5, se escribe $f(5)$. Para realizar la evaluación se sustituye el valor numérico en donde aparece la variable x y se realizan las operaciones aritméticas necesarias.

EJEMPLOS:

1) Evaluar la función $f(x) = 2x + 8$ cuando el valor numérico de x es 5.

$$f(5) = 2 \cdot 5 + 8$$

$$f(5) = 10 + 8$$

$$\boxed{f(5) = 18}$$

2) Si $f(x) = -3x - 1$ **¿cuál es el valor de** $f(-4)$**?**

$$f(-4) = -3 \cdot (-4) - 1$$

$$f(-4) = 12 - 1$$

$$\boxed{f(-4) = 11}$$

3) Si $x = \frac{1}{3}$, evalúe la función $f(x) = -\frac{7}{5}x - \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-7}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{15} - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-14 - 15}{30}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-29}{30}}$$

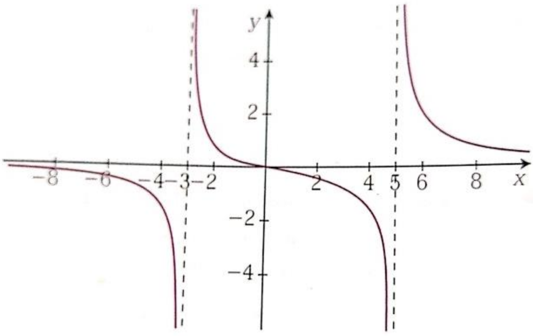
DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION

Dada la función $f: A \longrightarrow B$, el conjunto A se denomina el **dominio** de la función f y se simboliza Dom $f = A$. Los elementos del conjunto B, asociados con los elementos en A forman otro conjunto denominado el **rango** de la función f y se simboliza como Ran f.

El rango de una función es un subconjunto del conjunto de llegada, esto es Ran f ⊆ B. Además, si f(x) es una función real, es posible mediante su gráfica en el plano cartesiano, identificar el dominio y el rango de la función, ya que el eje horizontal representa la variable independiente, dominio de la función, y el eje vertical la variable dependiente, que es el rango de la función.
Para encontrar el dominio de una función se despeja la variable y y se buscan las restricciones que tiene x. Del mismo modo, para hallar el rango se despeja la variable x y se buscan las restricciones de y.

EJEMPLOS:
Determinar el dominio y el rango de cada funcion.

a. $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

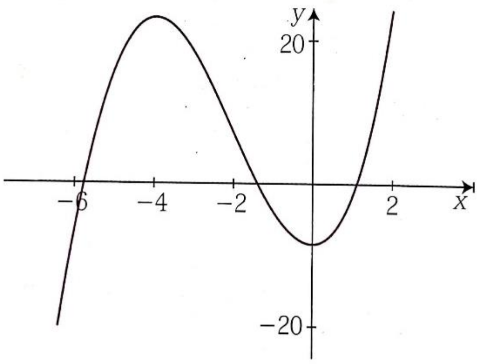


Cuando se observa la gráfica de la función

$f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2x - 15}$, se puede concluir que:

Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 5\}$ Ran $f = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = x^3 + 6x^2 - 8$



En la gráfica de la función $g(x) = x^3 + 6x^2 - 8$, se tiene que: Dom $g = \mathbb{R}$ y Ran $g = \mathbb{R}$.

c. $h(x) = \sqrt{\frac{x}{x+6}}$

EJEMPLOS

1. Encontrar el dominio de cada función.

a. $h(x) = \sqrt{3x + 2}$

Como las cantidades subradicales de raíces con índice par deben ser positivas o cero, se tiene que:

$3x + 2 \geqslant 0$

$3x \geqslant -2$

$x \geqslant -\frac{2}{3}$

Por tanto, Dom $h = \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

b. $g(x) = \text{Log}_3\,(x - 5)$

Como los logaritmos están definidos para valores positivos, se realiza:

$x - 5 > 0$

$x > 5$

Por tanto, Dom $g = (5, \infty)$.

2. Hallar el rango de la función $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 3}$.

Para hallar el rango, se despeja x, así:

$y = \frac{3x - 2}{x + 3}$

$y(x + 3) = 3x - 2$

$xy + 3y = 3x - 2$

$xy - 3x = -2 - 3y$

$x(y - 3) = -2 - 3y$

$x = \frac{-2 - 3y}{y - 3}$

Como $y - 3 \neq 0$, entonces, y no debe ser 3. Por tanto, Ran $f = R - \{3\}$.

3. Hallar el dominio y el rango de la función

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Como el denominador de la expresión racional debe ser diferente de cero, se tiene que:

Como $x^2 - 1 = 0$ cuando $x = 1$ o $x = -1$, entonces, la función $f(x)$ no está definida en estos valores.

Por tanto, Dom $f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Para hallar el rango se despeja x en $y = \frac{2}{x^2 - 1}$.

$y = \frac{2}{x^2 - 1}$

$yx^2 - y = 2$

$yx^2 = 2 + y$

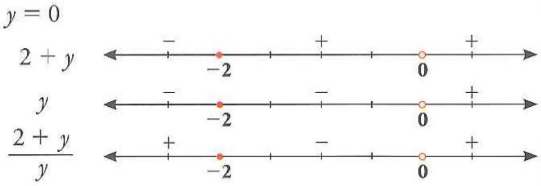
$x^2 = \frac{2 + y}{y}$

Entonces, $x = \pm\sqrt{\frac{2 + y}{y}}$.

Ahora, se resuelve $\frac{2 + y}{y} \geqslant 0$ utilizando la forma gráfica para solucionar desigualdades.

$2 + y = 0$, de donde $y = -2$

$y = 0$



Como $\frac{2 + y}{y} \geqslant 0$, entonces, la solución de la desigualdad es: $S = (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$.

Por tanto, Ran $f = (-\infty, -2] \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - (-2, 0]$.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

FUNCION INYECTIVA

Cada elemento del conjunto de llegada corresponde omo maximo a un elemento del conjunto de partida.

FUNCION SOBREYECTIVA

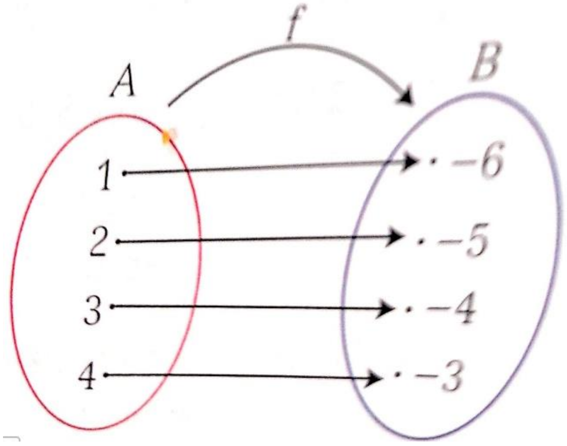
Cada elemento del conjunto de llegada le corresponde por lo menos un elemento del conjunto de partida.

FUNCION BIYECTIVA

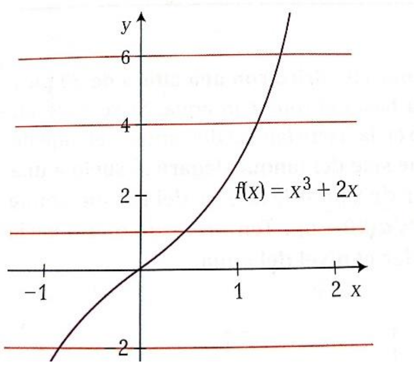
Una funcion es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

EJEMPLOS

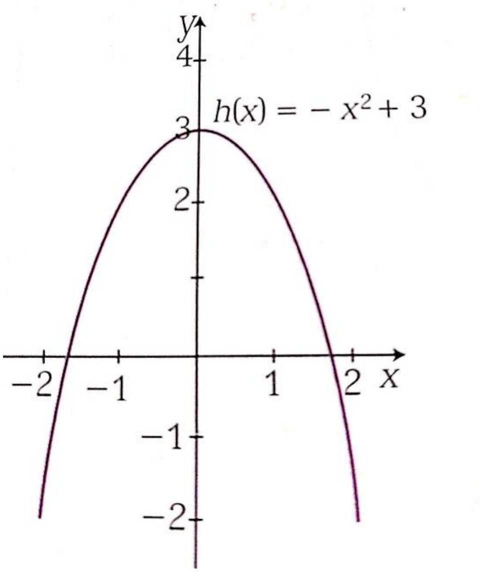
La funcion f(x) es inyectiva, porque a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento o ninguno elemento del conjunto de partida.



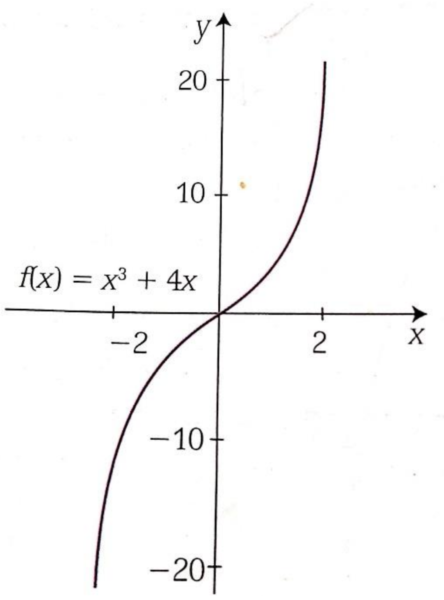
FUNCION INYECV



FUNCION SOBREYECTIVA



FUNCION BIYECTIVA



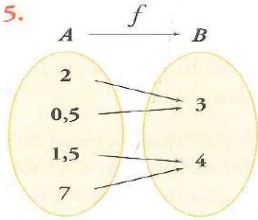
ACTIVIDADES

Responde. Explica con un ejemplo.

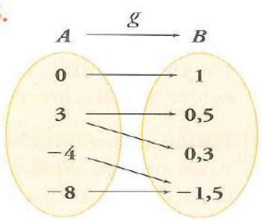
1. ¿Cómo se representa una relación?
2. ¿Cómo se distingue si una relación es una función a partir de su diagrama de flechas?
3. ¿Cómo se distingue si una relación es una función a partir de su representación cartesiana?
4. ¿Cuáles son las formas de representar una función?

Dados los conjuntos A y B, determina cuáles de las relaciones planteadas son funciones. Justifica tu respuesta.

5.



6.

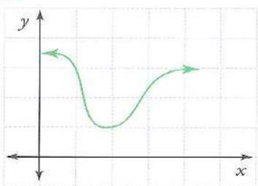


Escribe cuatro parejas ordenadas de cada función, si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función de los números naturales en los números naturales.

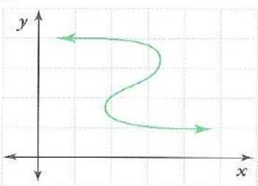
7. $f(x) = x$
8. $f(x) = 2x + 3$
9. $f(x) = x^3 + 1$
10. $f(x) = x + 1$
11. $f(x) = x + 3$
12. $f(x) = 4x^2 + 69$

Indica si las gráficas corresponden a funciones reales de variable real.

13.



14.



Lee y observa la forma como se determina la función $f(x) = x^2 + 1$. Luego, construye la tabla de valores correspondiente en cada caso y realiza la gráfica respectiva:

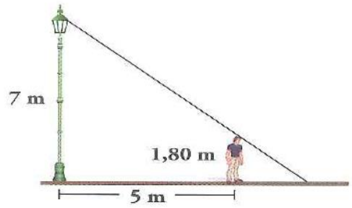
15. $f: R \rightarrow R$
16. $f: R^+ \rightarrow R^+$
17. $f: R^- \rightarrow R$
18. $f: R^- \rightarrow R^+$

Determina la función pedida en cada situación.

19. El área de un pentágono regular en función de la medida de su lado.
20. El área de un hexágono regular en función de la medida de su lado.

Lee y plantea la función que se indica en cada situación. Luego, responde.

Una farola tiene 7 m de altura. A 5 m de su base hay una persona de 1,80 m de altura que empieza a caminar en línea recta alejándose de la farola a una velocidad de 2 m/s.



21. Halla una función que exprese la longitud de la sombra en función del tiempo t, que se camina.

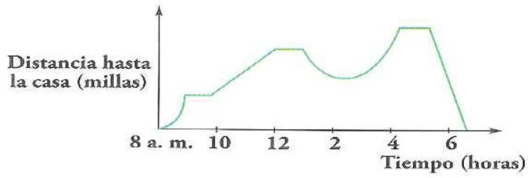
Un recipiente rectangular sin tapa tiene un volumen de 10 m³. El largo de la base de dicho recipiente es el doble que su ancho. Si se sabe que el material en el que se elabora la base cuesta $10.000 el metro cuadrado y el material con el que se elaboran las partes laterales cuesta $6.000 el metro cuadrado:

22. Expresa el costo de elaborar la caja en función del ancho de la base.
23. ¿Cuál es el costo si la longitud del ancho de la base es 5,2 m?

Lee y resuelve.

La siguiente gráfica representa la distancia a la que se encuentra un estudiante de su casa, como función de tiempo.

24. Describe con tus palabras lo que la gráfica indica sobre el tiempo y la distancia recorrida.

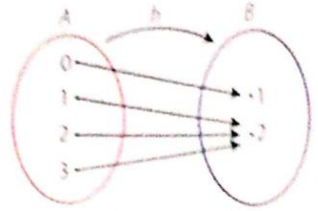


ACTIVIDADES

Identifica cuáles de las siguientes relaciones son funciones. Explica tu respuesta.

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ y $f: A \longrightarrow B$ y $f(x) = 2x$

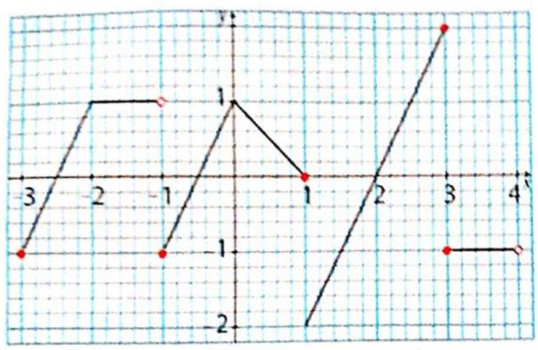
2.



3. f es la relación "es amigo de" que relaciona el conjunto de los habitantes de Suramérica con el conjunto de los habitantes de Colombia.

4. $f(x) = \sqrt{x}$ que relaciona el conjunto de los números naturales con el conjunto de los números reales.

Con base en la gráfica de la función. Determina la imagen para el valor de x dado.



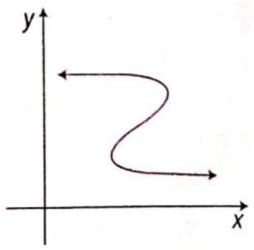
5. $f(23)$
6. $f(0)$
7. $f(22)$
8. $f(1)$
9. $f(21)$
10. $f(3,5)$

Determina si la afirmación es verdadera o falsa.

11. Si $f(x) = 4x + 16$ entonces $f(2) = 5$

12. El perímetro de un cuadrado de lado x es igual a cuatro veces la longitud del cuadrado, se puede modelar con la función $P(x) = 4x$.

13. La siguiente gráfica en el plano cartesiano representa una función.



14. El área de un hexágono regular en términos de la medida de su lado representa una función.

Identifica la variable dependiente y la variable independiente para cada una de las funciones descritas verbalmente.

15. Un número más tres veces su cuadrado.

16. El volumen de un cilindro con radio de tres centímetros y altura h.

17. Los ingresos por la venta de cierto número de productos si se venden a $1.300 cada uno.

Observa la tabla de valores de cada función. Luego, realiza un diagrama sagital que represente la función.

18.

x	2	5	8	10	14
$h(x)$	7	10	13	15	19

19.

x	-1	0	2	4	7
$g(x)$	2	10	5	17	50

Plantea la función que describe la situación dada.

20. El volumen de una esfera en función del radio.

21. El costo de producir x unidades de un artículo si los costos básicos son $500.000 semanales y el costo por producir una unidad es $3.000.

22. El área de un triángulo equilátero en función de su lado.

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

Un fabricante produce semanalmente 150 artículos que vende al doble del costo menos $1.000.

23. Determina una función que modele las utilidades recibidas en función del costo x de producir un artículo.

24. Halla la utilidad recibida por el fabricante si vende un artículo en $4.000

Completa la tabla de valores para cada función. Luego, realiza la gráfica.

25. $f(x) = x + 6$

x	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	1	5
$f(x)$					

26. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3}$

x	0	-1	$\frac{1}{2}$	5	6	10
$f(x)$						

Responde. Explica tu respuesta mediante un ejemplo.

1. ¿Cómo se determinan el dominio y el rango de una función?
2. ¿Por qué se utilizan las restricciones para hallar el dominio de una función?
3. ¿Cuál es el rango de la función polinómica definida por la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Determina si cada afirmación es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

4. El dominio de la función definida por $f(x) = \log\left(\frac{3x}{x+2}\right)$ es $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.
5. El rango de la función $h(x) = \frac{4}{x^2}$ es $\text{Ran}\, f = (0, \infty)$.
6. Todas las funciones polinómicas con grado n par, tienen como rango un subconjunto propio del conjunto de los números reales.
7. Las funciones con logaritmo tienen como dominio los números reales positivos.

Determina el dominio y el rango de la función dada.

8. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
9. $f(x) = \frac{4x-1}{x-2}$
10. $h(x) = -3x + 2$
11. $g(x) = x^2 + 4x - 1$
12. $f(x) = 2 - 3x - x^2$

Asocia la función con su dominio y su rango.

22. $f(x) = \log(x) - 1$ — a. $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}, \text{Ran}\, f = [3, \infty)$
23. $f(x) = x^2 - 3$ — b. $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1\}, \text{Ran}\, f = \mathbb{R} - \{1\}$
24. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ — c. $\text{Dom}\, f = [1, \infty), \text{Ran}\, f = [0, \infty)$
25. $f(x) = \sqrt{2x-2}$ — d. $\text{Dom}\, f = (0, \infty), \text{Ran}\, f = \mathbb{R}$

Realiza el bosquejo de la gráfica de la función f que cumpla con las condiciones dadas en cada caso.

26. Pasa por el origen, $\text{Dom}\, f = [-2, 2)$ y $\text{Ran}\, f = [-3, 6]$.
27. $\text{Dom}\, f = [-3, 5] - \{0, 2\}, \text{Ran}\, f = (-4, 2) \cup \{3\}$
28. $\text{Dom}\, f = [-4, 3] \cup (4, 6)\ \text{Ran}\, f = [-3, 2] \cup \{4\}, f(5) = 4$

Lee y responde.

Un tanque cilíndrico de 150 litros de capacidad tiene un orificio en el fondo como desagüe. Se está desocupando para lavarlo y se sabe que la cantidad de agua presente en el tanque después de cierto tiempo t está dada por la función $V(t) = 150 - kt$, donde k es una constante positiva, V representa el volumen de agua y t el tiempo en minutos.

29. ¿Cuál es el dominio de la función?
30. ¿Cuál es el rango de la función?

Responde. Explica con un ejemplo.

46. ¿Cómo se identifica si una función es inyectiva, a partir de su representación gráfica?

47. ¿Cómo se determina si una función es sobreyectiva, a partir de su expresión algebraica?

Determina si cada función dada es inyectiva. Justifica tu respuesta.

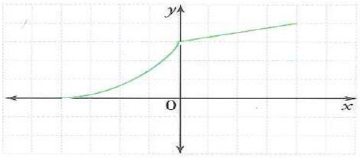
48.

x	0	-1	1	2	3
y	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

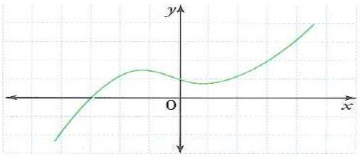
49.

x	-2	-1	0	1	2
y	1	0	1	4	9

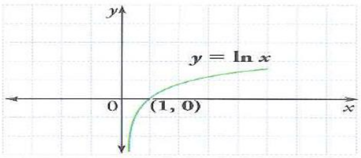
50.



51.



52.



Determina, en cada caso, si el enunciado es falso o verdadero. Justifica tu respuesta.

53. La función $f(x) = 8 - 4x$ es inyectiva. ( )

54. La función $g(x) = 7x^2 - 5$ es sobreyectiva. ( )

55. La función $h(x) = 2 \text{ Log } x$ es biyectiva. ( )

Escribe la expresión algebraica de una función que cumpla con las condiciones dadas.

56. Una función inyectiva tal que no sea sobreyectiva.

57. Una función sobreyectiva pero que no sea inyectiva.

58. Una función biyectiva.

Determina cuáles de las siguientes funciones son inyectivas. Para las funciones que no sean inyectivas, encuentra un ejemplo que muestre esta situación.

59. $h(x) = (x + 1)^2$

60. $f(x) = -2x^3 - 1$

61. $y = \dfrac{4}{x - 2}$

62. $f(x) = \sqrt{x + 6}$

63. $h(x) = \sqrt{4 - x}$

64. $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

Determina cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas. Justifica tu respuesta.

65. $f(x) = x^3$

66. $f(x) = \sqrt{x}$

67. $f(x) = \text{sen } x$

68. $f(x) = \cos x$

Lee y resuelve.

69. Si el costo de una boleta para un concierto aumenta en x pesos, el incremento del beneficio en miles de pesos está dado por la función $g(x) = 24 - 5x + x^2$, $x > 8$. ¿Es posible afirmar dentro del contexto que la función es biyectiva? Justifica tu respuesta.

Lee y responde.

En una fábrica el costo de x camisas está dado por la siguiente expresión: $C(x) = 3x^2 + 5$.

70. ¿Cuánto valen 1.000 camisas?

71. ¿Cuál sería el dominio de la función costo para esta situación?

72. En este contexto, ¿la función es biyectiva? Justifica tu respuesta.