Estrategia Didáctica					
Sede	**Principal**				
Eje temático	**P. MATEMATICO**	**Tema:**	**FUNCIONES TRIGONOMETRICAS**	**Grado**	**DECIMO**

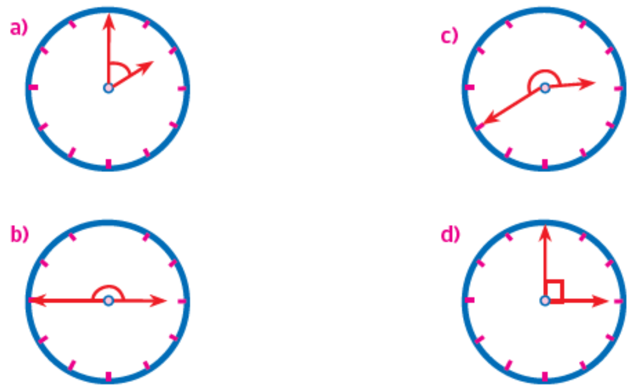
Criterio	**Contenidos (sub temas)**
	➢ Ángulos. ➢ Ángulos en posición normal. ➢ Medición de ángulos en el sistema sexagesimal. ➢ Ángulos coterminales. ➢ Medición de ángulos en el sistema cíclico. ➢ Longitud de arco. ➢ Movimiento circular.
Secuencia didáctica	
Inicio	En esta secuencia didáctica en su momento inicial se encuentra: ✓ Actividades de Conocimientos previos: permite al estudiante recordar y reconocer algunos temas que serán de apoyo y ayuda al presente tema. ✓ Situación de aprendizaje, que permite al estudiante introducirse en el tema a partir de la aplicación práctica relacionada con la vida cotidiana, el contexto y la transversalizacion con otras ejes y motiva la indagación y el descubrimiento.
Desarrollo	Esta secuencia didáctica en su momento de desarrollo consta de: ✓ Conceptualización y ejemplos: son todos los conceptos y ejemplos paso a paso necesarios para entender el tema y construir conocimiento escribiendo la teoría en el cuaderno de apuntes. ✓ Actividades: permite adquirir habilidades para interpretar, argumentar, proponer, ejercitar, razonar, modelar o solucionar problemas. Todos los ejercicios propuestos en cada actividad se deben desarrollar paso a paso en el cuaderno correspondiente. ✓ Pregunta tipo saber: Permiten el desarrollo de capacidades para razonar e interpretar y dar respuesta a preguntas de este tipo. ✓ Solución de problemas transversalizados: Ubica al estudiante en su contexto y le permite interpretar situaciones de la vida cotidiana.
Cierre	Esta secuencia didáctica en su momento final consta de: ✓ Evaluación: Permite reconocer el desempeño que tuvo el estudiante en el desarrollo de todas las actividades. ✓ Juego o actividad lúdico pedagógica: Permite llevar a la practica el tema estudiado mediante la aplicación de lo aprendido a un juego tradicional o actividades culturales.
Evaluación	**Criterios de Evaluación**
	➢ Construye su propio conocimiento, a partir de lo que ya sabe.
	➢ Se observa las habilidades para el desarrollo de competencias matemáticas en la resolución de actividades propuestas.
	➢ Plantea y soluciona problemas de la vida real.
	➢ Adquiere destrezas a lo largo del desarrollo de la secuencia didáctica.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Menciona los cuadrantes que posee un sistema de coordenadas cartesianas.
2. ¿Has escuchado hablar de ángulos?
3. ¿Cuántos minutos tiene una hora?
4. ¿Cuántos segundos tiene un minuto?
5. ¿Cuántos minutos hay en 1 día?
6. ¿Cuántos minutos hay en un mes de 30 días?
7. ¿Cuántos minutos hay en un año?
8. ¿Cuántos segundos hay en una hora?
9. ¿Cuántos segundos hay en un día?
10. ¿Cuántos segundos hay en una semana?
11. ¿Cuántos segundos hay en un mes de 30 días?
12. ¿Cuántos segundos hay en un año?

SITUACION DE APRENDIZAJE

1. **Indica en el reloj los diferentes ángulos que forman sus manecillas.**

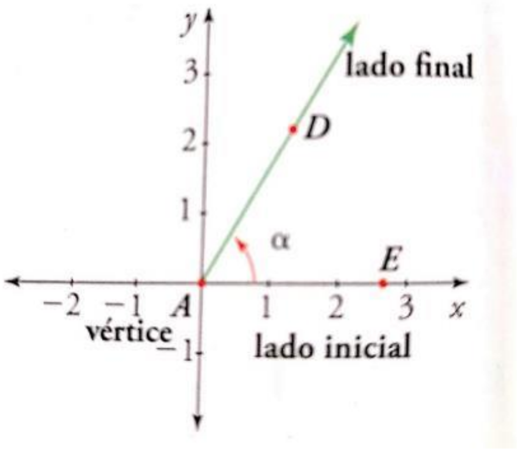


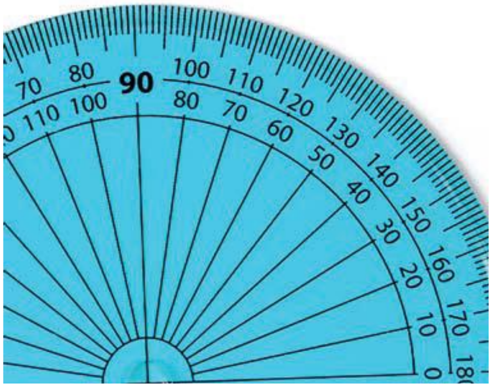
CONCEPTUALIZACION

ÁNGULOS

Un ángulo es el giro o rotación que se genera a partir de dos rayos que concurren en un punto fijo llamado vértice. Al rayo que permanece fijo se le denomina lado inicial y al rayo que gira se le llama lado final. El ángulo $\measuredangle\, DAE$ también se puede nombrar con la letra mayúscula de su vértice. $\measuredangle\, A$ con las letras minúsculas del alfabeto griego. Ejemplo (α)

PARTES DE LOS ANGULOS





Para medir ángulos usualmente se utilizan dos sistemas de medida: los grados sexagesimales y los radianes.

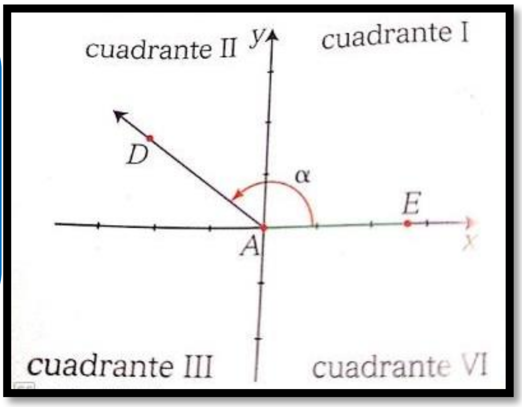
¿Cómo medir un ángulo?

Para medir un ángulo, se coloca el transportador sobre el ángulo de tal forma que su vértice coincida con el centro del transportador, generalmente marcado por un punto, y que uno de los lados coincida con la medida 0°.

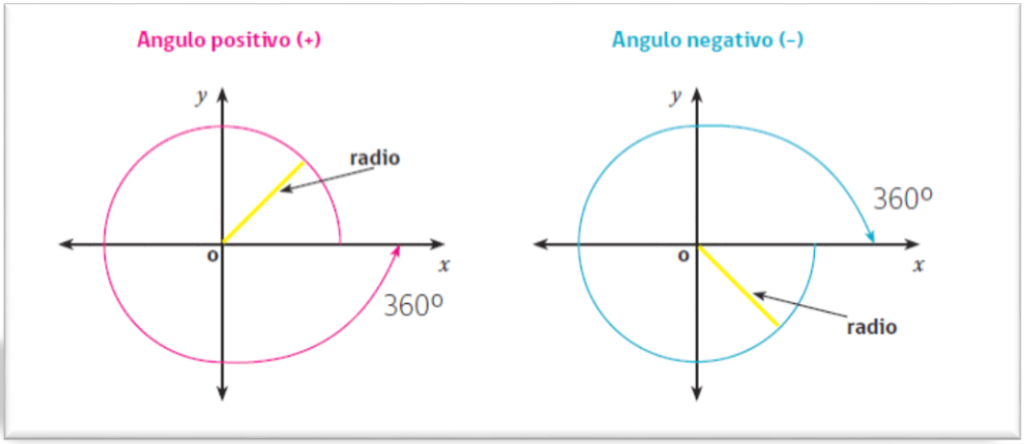
Los transportadores tienen normalmente dos listas de números que van en direcciones opuestas. Fíjese bien en usar la misma en la que coincidió el 0° con el lado del ángulo.

POSICION NORMAL O CANONICA DE ÁNGULOS

Un ángulo en posición normal es un ángulo ubicado en un sistema de coordenadas cartesianas en donde uno de sus lados coincide con el semieje positivo de las x y su vértice está en el origen. La ubicación del lado terminal indica el cuadrante en el cual se encuentra el ángulo.

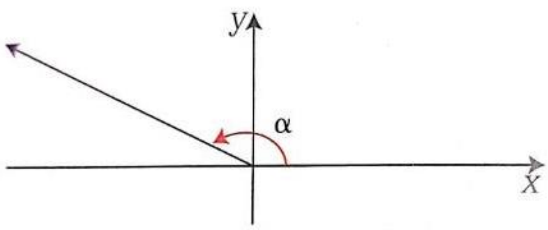


La rotación en sentido antihorario y su medida toma valores positivos. Si el ángulo se mide en sentido horario, su medida toma valores negativos.



EJEMPLO:

Determina el cuadrante donde se encuentra el ángulo y si es positivo o negativo.

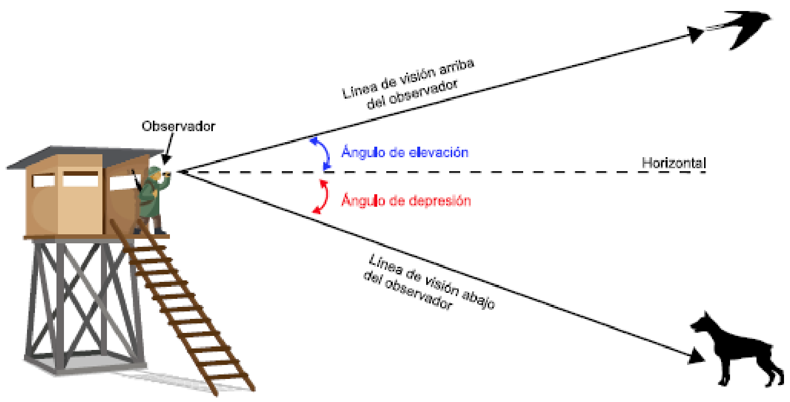


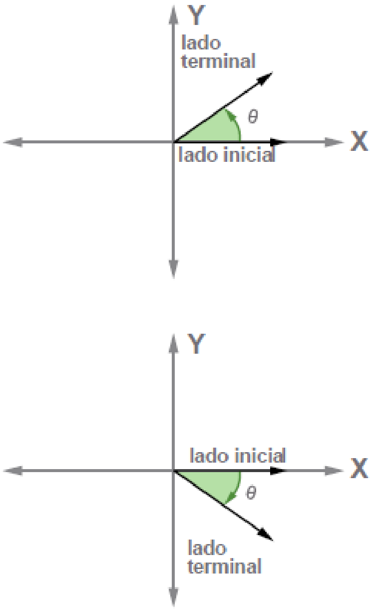
El ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, ya que su lado terminal también se encuentra allí.
Es positivo.

MEDICIÓN DE ANGULOS EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL

El sistema sexagesimal utiliza como unidad al grado. Un ángulo de giro completo es aquel que se genera por una rotación completa del lado final. La medida de este ángulo es de 360 grados y se escribe 360°, en el cual el símbolo ° se lee grados.
Con relación a un ángulo de giro completo, es importante tener en cuenta que:
Si un giro completo se divide en 360 partes iguales, entonces, cada parte, es un grado sexagesimal, es decir, $\frac{1}{360}$ parte de la rotación es igual a 1°.
Si un grado se divide en 60 partes iguales, entonces, cada parte es un minuto, es decir, $\frac{1}{60}$ de grado es igual a 1', el símbolo ' se lee minuto.
Si un minuto se divide en 60 partes iguales, entonces, cada parte es un segundo, es decir, $\frac{1}{60}$ de minuto es igual a 1", el símbolo " se lee segundo.
Por tanto, se concluye que: 1°=60"

EJEMPLO:
Desde un segundo piso de la I.E Izketa, un estudiante visualiza una lojona (paloma) con un Angulo de 32° 15'47".;
Determina la medida del Angulo en grados.

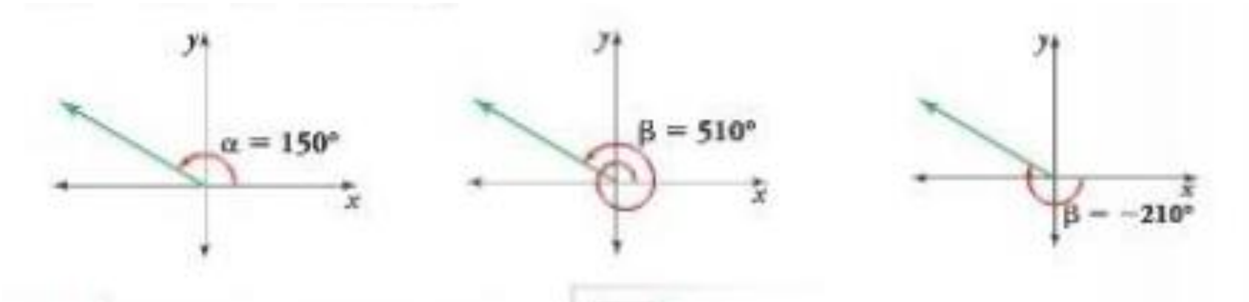




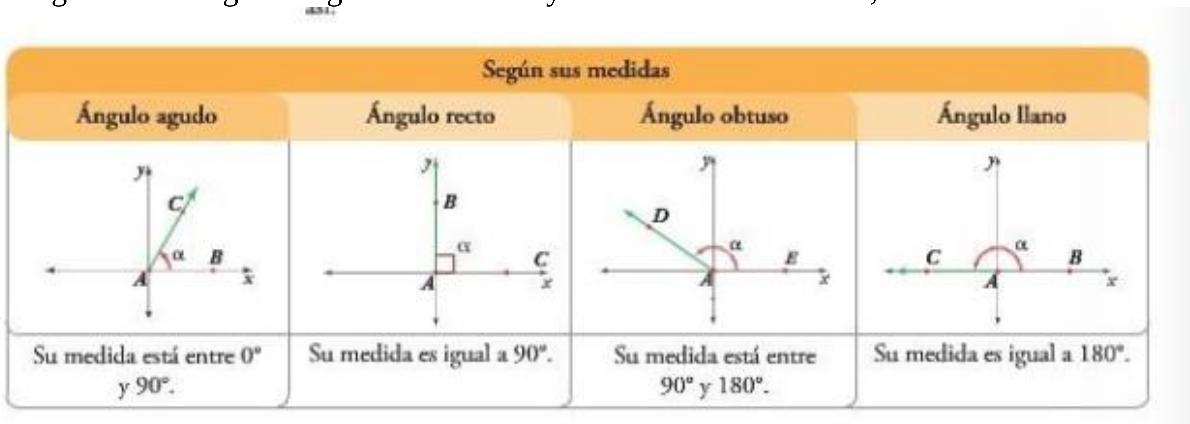
PROCESO:
1. La medida del Angulo se descompones como una suma de grados, minutos y segundos. 32°15'47"=32°+15'47"
2. Los minutos multiplican por 1°/60 y los segundos se multiplican por 1°/3.600 32°15'47"=32°+15'*1°/60+47"*1°/3600
3. Luego, se realizan las multiplicaciones: 32°15'47"=32+0,25+0,00131=32,2631
4. Finalmente se suman todas las cantidades.
5. El ángulo 32°15'47" es equivalente a 32°,2631°

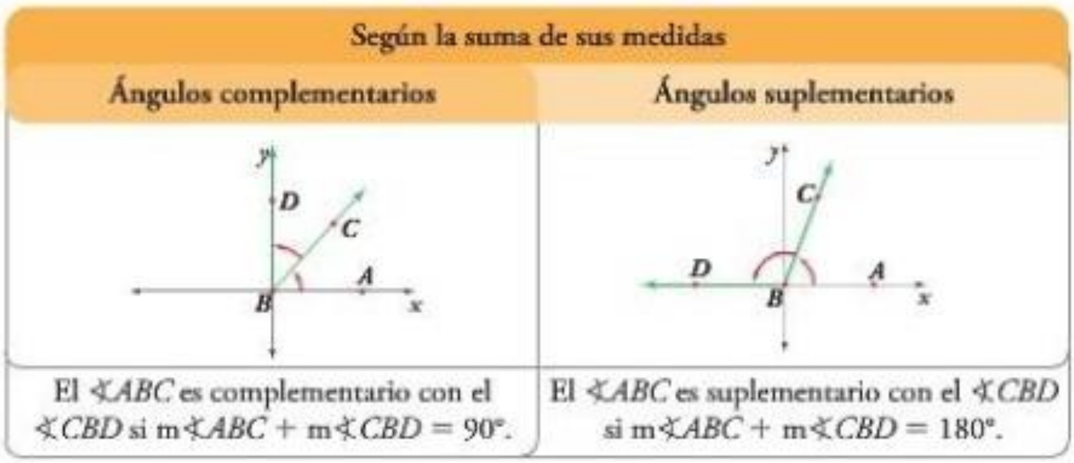
ANGULOS COTERMINALES

En un ángulo, el lado final puede realizar giros cualquier número de veces y cualquier dirección. Si el lado final gira en sentido a las manecillas del reloj, entonces, es ángulo un positivo. Si el lado final gira en el sentido de las manecillas del reloj, entonces es un ángulo negativo.
Das ángulos son coterminales si tienen las mismos lados iniciales y finales, sin importar su magnitud o sentido
Por ejemplo, en las siguientes figuras los angulos cuyas medidas son 150°, 510° y -210°, son coterminales porque 510° =150°+(1*360°) y, de la misma manera, -210° = 150°+(-1*360°)



En algunos problemas de trigonometría es importante tener en cuenta distintos tipos de ángulos. Los ángulos según sus medidas y la suma de sus medidas, así:





MEDICIÓN DE ANGULOS EN EL SISTEMA CICLICO

SITUACION DE APRENDIZAJE

El trapiche manual es un instrumento que se utiliza como elemento para moler la caña y producir la panela. El trapiche es movido por los caballos y de esta manera gira en forma circular para que así vaya moliendo la caña. Si un par de caballos dan 100 vueltas para moler un tobo de caldo de caña. ¿Qué ángulo giran los caballos mientras muelen la caña?
El ángulo se puede representar de diferentes formas como un grado o radianes.
Si la medida se toma en grados, una vuelta completa equivale a 360°, luego el ángulo de giro en 100 vueltas es de 36.000°
Si el valor medido se toma es en radianes un giro completo equivale a 2 π, luego el ángulo de giro de los caballos en el trapiche es de 200 π radianes.

Un ángulo central en una circunferencia con centro en el origen O Y radio r, es aquel formado por dos radios. El ángulo tiene como vértice el origen Y subtiende un arco s de la circunferencia.
El sistema cíclico de medición de ángulos tiene como unidad de medida básica el radián.
Un radián (rad) es la medida de un ángulo central de una circunferencia cuya longitud el arco subtendido es igual al radio de la circunferencia.

NOTA:
El giro de la rueda de una bicicleta describe ángulos en radianes. si el radio de la rueda de una unidad entonces, un giro completo describe un ángulo un de 2πrad. En las siguientes imágenes se muestran los principales ángulos en radianes que describe una rueda al girar.

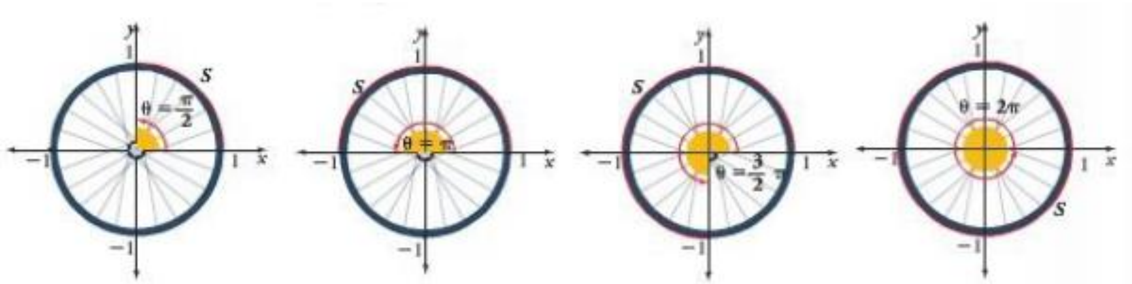


TABLA DE EQUIVALENCIAS DE ANGULOS ESPECIALES EN GRADOS Y RADIANES

Tabla de quivalencias

Grados	Radianes
30°	π/6
45°	π/4
90°	π/2
135°	3π/4
150°	5π/6
180°	π
225°	5π/4
270°	3π/2
330°	11π/6
360°	2π

RELACION ENTRE GRADOS Y RADIANES

Teniendo en cuenta que el perímetro de toda circunferencia de radio r está dado por 2πr, entonces se tiene que $\frac{2\pi r}{r}$=2 π, que indica el número de veces, que está el radio de una circunferencia en su perímetro. Esto indica que un ángulo de giro completo que mide 360° equivale a 2π radianes. Por tanto 360°= 2π. Dividiendo por 360° a ambos lados de la ecuación se tendrá que:

$$\mathbf{1°\frac{\pi}{180}rad}$$

$$\mathbf{1° \approx 0,0174533\, rad}$$

La equivalencia de un radian en grados se obtiene de la misma ecuación y se divide a ambos lados por 2π, asi:

$$\frac{360°}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi}$$

$$\frac{180°}{\pi} = 1\, rad, luego\ 1\, rad \approx 57{,}2958°.$$

De lo anterior que 360°= 2 *rad* y viceversa, lo que significa que:

- Suponga 38° convertidos a *rad* (radianes)

	rad	
360°	2	→ 38x2 /360°
38°	x	76 /360°=19 /90

- Suponga π convertidos a *rad* (radianes)

	rad	
360°	2 π	→ 360 π /2 π
x	π	180°

EJEMPLOS

1. **Las bisagras de una puerta de seguridad tienen una apertura máxima de 60°. Expresar esta medida en radianes.**

Primero, se multiplica 60° por $\frac{\pi}{180°}$ que es el factor de conversión.

$$60° \times \frac{\pi}{180°}$$

Luego, se simplifica.

Finalmente, se tiene que la apertura máxima de la puerta de seguridad es $\frac{1}{3}\pi$ rad.

2. **El minutero de un reloj marca el número 3 y al cabo de un tiempo se ha desplazado $\frac{5}{6}\pi$ rad. Expresar esta medida en grados.**

Primero, se multiplica $\frac{5}{6}\pi$ rad por $\frac{180°}{\pi}$ que es el factor de conversión.

$$\frac{5}{6}\pi \times \frac{180°}{\pi}$$

Luego, se simplifica.

Finalmente, se tiene que el minutero hace un giro de 150°.

LONGITUD DE ARCO

La longitud de un arco s subtendido por un ángulo central θ medido en radianes, en una circunferencia de radio r como se muestra en la imagen. Se calcula mediante la expresión s=r θ

AREA DE SECTOR CIRCULAR

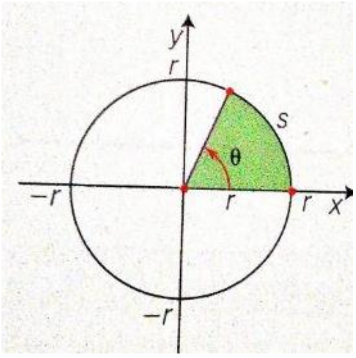
El área de un sector circular subtendido por un ángulo θ, en radianes, en una circunferencia de radio r, está dado por la expresión $A_{SC} = \frac{r^2}{2}\theta$

La fórmula se obtiene al establecer que la proporción entre áreas del circulo A_{SC}, es igual a la proporción entre las longitudes de curva dela circunferencia L_C y la subtendida s por el ángulo θ, asi:

$$\frac{A_{SC}}{A_C} = \frac{S}{L_C} \Longrightarrow \frac{A_{SC}}{\pi r^2} = \frac{r\theta}{2\pi r}$$

$$A_{SC} = \frac{r\theta}{2\pi r}.\pi r^2$$

$$A_{SC} = \frac{r^2\theta}{2}$$



MOVIMIENTO CIRCULAR

Un movimiento circular, es aquel en el cual el objeto describe una trayectoria en forma de circunferencia, es decir, debe cumplir que la distancia desde un punto fijo central, al objeto siempre sea la misma. Esta distancia se cono ce como radio.
Ejemplo:
El centro de la circunferencia que hacen los caballos al dar la vuelta en el trapiche es el lugar donde se encuentra el mismo.
Una aplicación importante para el manejo de ángulos es el sistema de medida cíclico es el movimiento circular. Dicho movimiento se encuentra en diversas situaciones como: el movimiento de una rueda, el movimiento del rotor de un motor y los engranajes de máquinas mecánicas entre otros. En este movimiento el interés se centra en encontrar una expresión que modele el desplazamiento de un punto R a lo largo de una circunferencia C en un tiempo t determinado. En el movimiento circular se pueden encontrar dos velocidades llamadas velocidad angular y velocidad lineal.

VELOCIDAD ANGULAR
Si un objeto que gira con rapidez constante, parte de un punto R, en un tiempo t=0, hasta un punto R/2 en un tiempo t, entonces describe un ángulo θ, como muestra en la imagen.

Luego la velocidad angular (ω) del objeto, está dada por la expresión $(\omega) = \frac{\theta}{t}$ donde, θ se mide en radianes. Además, si el objeto se desplaza del punto Q1 al punto Q2 la velocidad angular es la misa.
El número de vueltas que realiza el objeto en una determinada unidad de tiempo se denomina Frecuencia. Así, si el ángulo se determina por el número de vueltas y el tiempo se mide en minutos, la frecuencia se mide en revoluciones por minuto. (rpm).

VELOCIDAD LINEAL.
La velocidad lineal (v) de un punto sobre circunferencia se define de dos maneras: Como el producto entre la velocidad angular ω y el radio r de la circunferencia, o como el cociente entre la longitud de arco s y el periodo de tiempo (t) que tarda el movimiento. Por tanto, se cumple las siguiente s igualdades:

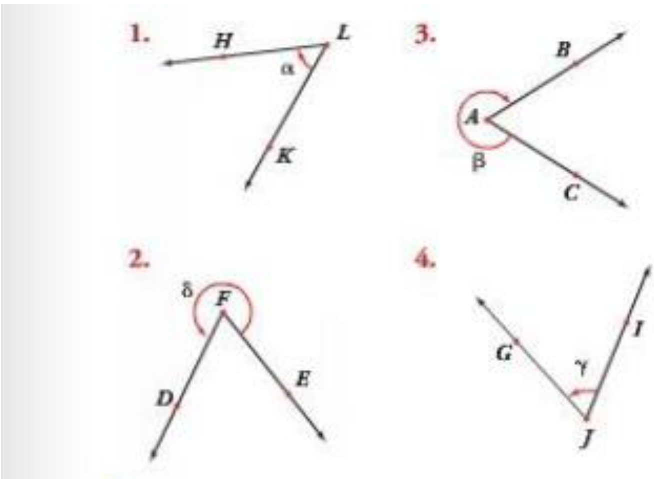
$$v = \omega r \qquad y \quad v = \frac{s}{t}$$

EJEMPLO:
En un trapiche, las masas giran con una frecuencia de 12rpm. ¿Cuál es la velocidad angular que experimenta cada persona en esta rueda?

PASOS	DESCRIPCION
PASO 1	Se tiene que el número de revoluciones por minuto es 12, y cada revolución o giro completo equivale a 2πrad.
PASO 2	Se multiplica el número de revoluciones por 2πrad para obtener el ángulo de rotación θ. $\theta = 12 \times 2\pi\ rad$ $\theta = 24\pi rad$
PASO 3	Finalmente se divide el ángulo de rotación entre el tiempo t= 1 min, para hallar la velocidad angular. $\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{24\pi rad}{1\ min} = 24\pi\ rad/min$

ACTIVIDAD 1

1. **Menciona el nombre de cada ángulo y determina el lado inicial, el lado final, el vértice y el sentido.**



2. **Determina el cuadrante en el cual se encuentra cada ángulo.**

a. 5°
b. 123°
c. -25°
d. 225°

e. 721°
f. -258°
g. -421°
h. -1220°

3. Expresa cada ángulo en grados, minutos y segundos.

a. 62,735°
b. 2,364°
c. 46,34°
d. 132,657°
e. 35,225°
f. -116,89°
g. -49,371°
h. 60,728°

4. Expresa el ángulo en grados.

a. 30°15’35”
b. 123°22’45”
c. 246°22’46”
d. 140°35’15”
e. 42°59’60”
f. 116°89’
g. 0°12’45”

5. Convierte en radianes los ángulos dados.

a. 150°
b. -135°
c. 72°
d. 100°
e. -225°
f. -450°
g. 720°
h. 1.350°

6. Expresa en grados los ángulos dados.

$\frac{2\pi}{3}$ rad

$-\frac{7\pi}{2}$ rad

$\frac{11\pi}{4}$ rad

$\frac{\pi}{9}$ rad

$-\frac{4\pi}{3}$ rad

$\frac{7\pi}{9}$ rad

$-\frac{15\pi}{12}$ rad

$\frac{19\pi}{2}$ rad

$-\frac{26\pi}{3}$ rad

$\frac{22\pi}{13}$ rad

7. Determina la medida en radianes del ángulo menor que forman las manecillas de la hora y los minutos del reloj.

a. A las 8:30
b. A las 7:00
c. A las 11:20

d. A la 1:00
e. A las 5:45
f. A las 9:15

PRUEBA SABER

8. Una rueda da una vuelta completa en 5 minutos. Si la rapidez de giro no cambia, ¿Qué ángulo en radianes gira al cabo de 60 segundos?

a. $\frac{2\pi}{5} rad$
b. $\frac{5\pi}{2} rad$
c. $2\pi rad$
d. $\frac{\pi}{5\ rad}$

9. Calcula la longitud del arco de una circunferencia de 25cm de radio, subtendido por un ángulo de 1,2 rad.

10. Halla el área de un sector circular de 20cm de radio, si el ángulo central mide 1 rad.

11. Calcula el ángulo central de un sector circular de 35m radio, si su área es de 824m cuadrados.

12. Calcula la velocidad angular de un objeto con movimiento circular que genera un ángulo de 7/4 π en una hora y media.

13. Halla la velocidad lineal de un cuerpo que recorre una circunferencia de 3m de radio a razón de cinco vueltas por segundo.